

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

А. Я. Карвацький

НАУКОВА РОБОТА ЗА ТЕМОЮ МАГІСТЕРСЬКОЇ ДИСЕРТАЦІЇ

**Методи та інструменти числового аналізу
фізичних полів обладнання хімічних виро-
бництв та пакувальної техніки**

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів,
які навчаються за спеціальностями 131 «Прикладна механіка», 133 «Галузеве
машинобудування», спеціалізаціями «Інжиніринг, комп'ютерне моделювання та
проектування обладнання пакування», «Інжиніринг, комп'ютерне моделювання
та проектування обладнання виробництв полімерних і будівельних матеріалів і
виробів»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2018

Рецензент:

Коржик М. В., к-т техн. наук, доц.

Відповідальний
редактор

Мікульонок І. О., д-р техн. наук, проф.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 10 від 21.06.2018 р.)
за поданням Вченої ради інженерно-хімічного факультету (протокол № 5 від 29.05.2018 р.)*

Навчальний посібник

Карвацький Антон Янович, д-р техн. наук, проф.

НАУКОВА РОБОТА ЗА ТЕМОЮ МАГІСТЕРСЬКОЇ ДИСЕРТАЦІЇ

Методи та інструменти числового аналізу фізичних полів
обладнання хімічних виробництв та пакувальної техніки

Наукова робота за темою магістерської дисертації. Методи та інструменти числового аналізу фізичних полів обладнання хімічних виробництв та пакувальної техніки [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальностей 131 «Прикладна механіка», 133 «Галузеве машинобудування», спеціалізації «Інжиніринг, комп'ютерне моделювання та проектування обладнання пакування», «Інжиніринг, комп'ютерне моделювання та проектування обладнання виробництв полімерних і будівельних матеріалів і виробів» / А. Я. Карвацький. – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 234 с.

Подано теоретичні основи з розробки заходів з підвищення енергоефективності, міцності й довговічності обладнання хімічних виробництв та пакувальної техніки. Розглянуто базові принципи дослідження енергоефективності та міцності технологічного обладнання підприємств хімічних виробництв методами математичного моделювання. Наведено приклади застосування числового аналізу для розробки енергоефективних конструкцій і регламентів експлуатації конкретного промислового обладнання з підвищеними механічними характеристиками.

Для студентів вищих навчальних закладів, які навчаються за спеціальностями «Прикладна механіка» і «Галузеве машинобудування» та інших споріднених спеціальностей: теплоенергетики, будівельної та нафтопереробної галузей промисловості.

УДК 531/534(075.8)

© А. Я. Карвацький, 2018

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018

ВСТУП

Навчальна дисципліна «Наукова робота за темою магістерської дисертації» та кредитний модуль «Наукова робота за темою магістерської дисертації - 2. Науково-дослідна робота за темою магістерської дисертації» відноситься до циклу професійної та практичної підготовки студентів. У цьому кредитному модулі розглядаються базові принципи дослідження енергоефективності, міцності й довговічності діючого технологічного обладнання підприємств хімічних виробництв і пакувальної техніки та обладнання, що проектується методами математичного моделювання, що включають: постановку задач з оцінки теплових та механічних параметрів технологічних процесів і промислового обладнання; методи числового дослідження та аналізу енергетичного та механічного стану промислового обладнання; тепловий та енергетичний баланси як основний інструмент визначення резервів енергозбереження промислового обладнання; сучасні методи оцінки ефективності теплового обладнання та технологічних процесів; базові заходи з енергозбереження в промисловості тощо. Вивчення дисципліни базується на знаннях, отриманих після вивчення математики, інформатики, нарисної геометрії, хімії, фізики, термодинаміки, обчислювальної математики, програмування.

Метою дисципліни є формування знань студентів про основи енергетичного та механічного аналізу промислового обладнання хімічних виробництв методами математичного моделювання фізичних процесів, що впливають на їх енергетичний і механічний стан.

Предмет дисципліни – методи та інструменти числового аналізу енергоефективності, міцності й довговічності технологічного устаткування хімічної промисловості та пакувальної техніки.

Засвоївши цю дисципліну, фахівець у галузі енергозбереження і міцності в хімічній промисловості та пакувальній техніці *повинен знати*:

- теоретичні основи з побудови фізичних і математичних моделей теплового, теплоелектричного, тепло-гідродинамічного та термомеханічного стану промислового обладнання хімічної промисловості та пакувальної техніки;

- числові методи розв'язання задач фізичного стану промислових об'єктів;

- базові принципи дослідження енергоефективності й міцності діючого технологічного обладнання підприємств хімічних виробництв та обладнання, що проектується;

- методи розрахунку показників енергетичної ефективності, розроблення та впровадження у виробництво енергозаощаджувальних заходів, а також *уміти*:

- формулювати математичні моделі фізичного стану (теплового, теплоелектричного, тепло-гідродинамічного та термомеханічного) обладнання хімічної промисловості та виробництва будівельних матеріалів;

- користуватися сучасними CAD-CAE системами при побудові твердотільних моделей елементів конструкції промислового обладнання хімічних виробництв, зокрема, 3D CAD-системами і програмними продуктами ANSYS;
- виконувати розробку числових моделей фізичного стану, зокрема теплового, теплоелектричного, тепло-гідродинамічного та механічного промислових об'єктів хімічної промисловості;
- проводити числовий аналіз теплового, теплоелектричного, тепло-гідродинамічного або термомеханічного стану промислового обладнання за розробленими числовими моделями;
- на підставі проведених розрахунків складати теплові та енергетичні баланси і проводити їх енергетичний аналіз з метою визначення резервів енергозбереження в промисловому обладнанні.

У навчальному посібнику, складеному на основі курсу лекцій, який автор читає на кафедрі хімічного, полімерного та силікатного машинобудування Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», наведено мінімум емпіричних рівнянь і майже немає довідкових даних. Ці відомості, а також безпосередньо моделювання енергозберігаючих регламентів та механічного стану конкретного промислового обладнання розглядають під час практичних занять, а також виконання студентами курсового проектування.

ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ ТА СКОРОЧЕННЯ

Основні позначення

A	поглинальна спроможність тіла;
a	температуропровідність, $\text{м}^2/\text{с}$;
B	масова (об'ємна) витрата палива, $\text{кг}/\text{с}$, $\text{м}^3/\text{с}$;
$[B]$	матриця градієнтів скінченного елемента;
C_p	об'ємна ізобарна теплоємність, $\text{Дж}/(\text{м}^3 \cdot \text{К})$;
C_v	об'ємна ізохорна теплоємність, $\text{Дж}/(\text{м}^3 \cdot \text{К})$;
c	швидкість світла у вакуумі, $\text{м}/\text{с}$;
c_1	перша константа випромінювання, $\text{Вт} \cdot \text{м}^2$;
c_2	друга константа випромінювання, $\text{м} \cdot \text{К}$;
c_p	масова ізобарна теплоємність, $\text{Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$;
c_v	масова ізохорна теплоємність, $\text{Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$;
D	коефіцієнт пропускання тіла;
$[D]$	матриця теплопровідності, пружних характеристик матеріалу;
dF	площа елементарної площадки, м^2 ;
dV, dv	елементарний об'єм, м^3 ;
$d\tau$	елементарний проміжок часу, с ;
E	модуль пружності при розтягу, Па ; об'ємна густина радіаційного теплового потоку, $\text{Вт}/\text{м}^3$; густина потоку інтегрального випромінювання, $\text{Вт}/\text{м}^2$;
$E_{0\lambda}$	спектральна густина потоку випромінювання, яка залежить від довжини хвилі, $\text{Вт}/\text{м}^3$;
F	число Фарадея, $\text{Кл}/\text{моль}$; коефіцієнт опромінення;
f	коефіцієнт сухого тертя;
\mathbf{G}	матриця коефіцієнтів впливу для потоку дискретної функції;
G	пружний модуль зсуву, Па ; масова витрата, $\text{кг}/\text{с}$;
g	прискорення вільного падіння, $\text{м}/\text{с}^2$;
\mathbf{g}	вектор гравітації, $\text{м}/\text{с}^2$;
$\{\mathbf{g}\}$	вектор складових градієнта;
\mathbf{H}	матриця коефіцієнтів впливу дискретної функції;
H	об'ємна ентальпія, $\text{Дж}/\text{м}^3$;
h	стала Планка, $\text{Дж} \cdot \text{с}$; масова ентальпія, $\text{Дж}/\text{кг}$; крок інтегрування по координаті, м ;
\mathbf{I}	одиничний тензор другого рангу;
I	сила струму, А ;
$I_{0\nu}$	функція Планка, $\text{Вт} \cdot \text{с}/\text{м}^2$;
I_ν	спектральна інтенсивність випромінювання, $\text{Вт} \cdot \text{с}/(\text{м}^2 \cdot \text{ср})$;

J_λ –	спектральна інтенсивність випромінювання, Вт/(м ² ·м);
j –	густина електричного струму, А/м ² ;
\mathbf{j} –	вектор густини електричного струму, А/м ² ;
K –	коефіцієнт поглинання, м ⁻¹ ;
k –	стала Больцмана, Дж/К; масова кінетична енергія турбулентності, Дж/кг; коефіцієнт поглинання, м ⁻¹ ;
k_r –	коефіцієнт радіаційної теплопровідності, Вт/(м·К);
$[k_\lambda^{(e)}]$ –	матриця теплопровідності скінченного елемента;
$[k^{(e)}]$ –	матриця жорсткості скінченного елемента;
$[N]$ –	матриця-рядок коефіцієнтів функцій форми;
n –	показник заломлення;
\mathbf{n} –	вектор нормалі до поверхні;
P –	тиск, Па;
p –	тиск, Па; зовнішнє зусилля, Па;
Q –	тепловий потік, тепловтрати, Вт;
Q_n^p –	нижча робоча теплота згоряння палива, Дж/кг;
q –	густина теплового потоку, Вт/м ² ;
\mathbf{q} –	вектор густини теплового потоку, Вт/м ² ;
q_v –	густина (потужність) внутрішнього джерела теплоти, Вт/м ³ ;
R –	коефіцієнт відбиття поверхні;
R^3 –	тривимірна задача;
r –	радіус, м; відстань між точками, м;
\mathbf{r} –	радіус-вектор, м;
r_e –	контактний електричний опір, Ом·м ² ;
r_λ –	контактний термічний опір, (м ² ·К)/Вт;
S –	площа, м ² ; тензор девіаторних напружень, Па;
s –	напрямок променя;
T –	абсолютна температура, К;
t –	температура, °С; час, с;
U –	електричний потенціал, В; внутрішня енергія, Дж;
u –	переміщення, м; масова внутрішня енергія, Дж/кг;
u_i –	компоненти швидкості, м/с;
u, v, w –	компоненти швидкості, м/с;
\mathbf{V} –	вектор швидкості, м/с;
V –	об'єм, м ³ ;
ν –	коефіцієнт Пуассона; частота, Гц;
w –	питомі витрати електроенергії, кВт·год/т;
$X(x, y, z)$ –	декартові координати, м;

x, y, z –	декартові координати, м;
α –	коефіцієнт тепловіддачі, Вт/(м ² ·К);
β –	коефіцієнт лінійного термічного розширення рідини, К ⁻¹ ; коефіцієнт розсіювання, м ⁻¹ ;
χ –	електропровідність, (Ом·м) ⁻¹ ;
$\Delta\tau$ –	крок інтегрування за часом, с;
δ –	товщина, м; початковий зазор, м; символ Кронекера;
ε –	деформація; швидкість дисипації кінетичної енергії турбулентності, Дж/(кг·с); ступінь чорноти;
Φ –	потенціал; дисипація енергії, Дж/(кг·с);
γ –	електрохімічний еквівалент отримання алюмінію, г/(А·год);
η –	об'ємне випромінювання, Вт/м ³ ; безрозмірні координати;
η_t –	вихід за струмом;
Γ –	границя розрахункової області Ω ;
φ –	потенціал; азимутальний кут, рад;
κ –	коефіцієнт ослаблення, м ⁻¹ ;
λ –	теплопровідність, Вт/(м·К); довжина хвилі випромінювання, м;
μ –	динамічна в'язкість, Па·с;
μ_t –	турбулентна в'язкість, Па·с;
π –	число Пі;
θ –	полярний кут, рад;
ρ –	густина, кг/м ³ ;
σ –	стала Стефана-Больцмана, Вт/(м ² ·К ⁴); тензор напружень, Па;
τ –	час, с;
$\bar{\tau}$	тензор напружень, Па;
$\bar{\tau}_{\text{eff}}$ –	тензор ефективних напружень розтягу-стискання, Па;
Ω –	тілесний кут, ср;
Ω_0 –	розрахункова область.

Основні індекси

0 –	стосується початкового значення;
\wedge –	стосується верхнього часового рівня;
ef –	стосується ефективного значення;
inlet –	стосується вхідного січення;
max –	стосується максимального значення;
n –	стосується нормальної складової;
outlet –	стосується вихідного січення;
r –	стосується радіаційного потоку;
t –	стосується турбулентного потоку;

ν –	стосується частоти випромінювання;
Γ –	стосується границі тіла;
τ –	стосується тангенціальної складової;
ан –	стосується аноду;
а.е. –	стосується анодних ефектів;
відб –	стосується відбитого випромінювання;
вл –	стосується власного випромінювання;
гр –	стосується грійної напруги;
e –	стосується скінченного елемента;
ел –	стосується електроліту;
еф –	стосується ефективного значення;
МПЗ –	стосується міжполюсного зазору;
ом –	стосується електричного опору;
ош –	стосується шини (електричної);
пад –	стосується випромінювання, що падає;
пог –	стосується поглинутого випромінювання;
под –	стосується подини;
пр –	стосується приведенного значення, пропущеного випромінювання;
р –	стосується рідини, робочої напруги;
рад –	стосується радіаційної температури;
рез –	стосується результуючого випромінювання;
розс –	стосується розсіювання випромінювання;
с –	стосується стінки;
я –	стосується яркісної температури.

Інші символи

«+», «–» –	означає, відповідно, праворуч і ліворуч від границі Γ ;
D/D_t –	субстанціональна похідна;
div –	дивергенція;
Sc_t –	число Шмідта;
grad –	градієнт;
Δ –	оператор Лапласа;
∇ –	оператор Гамільтона («набла»);
:	оператор подвійного скалярного добутку;
\vee –	логічне «або».

Основні скорочення

APDL –	ANSYS Parametric Design Language;
CAD –	computer-aided design;
CFD –	Computer Fluid Dynamics – обчислювальна гідродинаміка;

DNS –	Direct Numerical Simulation – пряме числове моделювання;
LES –	Large Eddy Simulation – моделювання великих вихорів;
RANS –	Reynolds averaged Navier-Stokes equations – осереднені за Рейнольдсом рівняння Нав'є-Стокса;
SIMPLE –	Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations або напівнеявний метод розв'язку рівнянь, які зв'язують тиск;
SIMPLEC –	SIMPLE-Consistent або SIMPLE-стійкий;
ГУ –	граничні умови;
ЗМ –	зональний метод;
кафедра	кафедра хімічного, полімерного та силікатного машинобуду-
ХПСМ –	вання НТУУ «КПІ»;
КО –	коефіцієнт опромінення;
ЛОС –	локально-одновимірна схема;
МГЕ –	метод граничних елементів;
МДО –	метод дискретних ординат;
МПЗ –	міжполюсний зазор;
МСЕ –	метод скінченних елементів;
МСО –	метод скінченних об'ємів;
МСР –	метод скінченних різниць;
НДС –	напружено-деформований стан;
ОА –	обпалений анод;
ПМГЕ –	прямий метод граничних елементів;
ПВЕ –	питомі витрати електроенергії;
СА –	самоспівклиний анод;
СЛАР –	система лінійних алгебричних рівнянь.

1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ МЕХАНІЗМІВ ТЕПЛОПЕРЕНОСУ

1.1. Теплообмін теплопровідністю. Рівняння теплопровідності. Умови однозначності

1.1.1. Загальні відомості

Для розв'язання задач, що пов'язані зі знаходженням температурного поля, необхідно мати диференціальне рівняння теплопровідності [1]. У результаті інтегрування цього рівняння отримують аналітичну залежність температури від просторових координат і часу.

Для спрощення виводу диференціального рівняння теплопровідності введемо такі припущення:

- тіло однорідне й ізотропне;
- фізичні параметри постійні;
- деформація об'єму, яка спричинена температурним навантаженням, нехтовно мала, порівняно з розмірами об'єму;
- внутрішні джерела теплоти в тілі постійні $q_v = \text{const}$ і розподілені рівномірно.

Вивід диференціального рівняння теплопровідності базується на законі збереження енергії, який у цьому випадку можна сформулювати так: кількість теплоти dQ , Дж, що входить у елементарний об'єм dv , м³ зовні за елементарний проміжок часу $d\tau$, с, за рахунок теплопровідності та внутрішніх джерел теплоти, дорівнює зміні внутрішньої енергії (для ізохорного процесу або ентальпії для ізобарного) речовини, яка міститься в елементарному об'ємі

$$dQ_1 + dQ_2 = dQ, \text{ Дж} \quad (1.1)$$

де dQ_1 – кількість теплоти, що вводиться в елементарний об'єм dv теплопровідністю за час $d\tau$; dQ_2 – кількість теплоти, що виділяється в елементарному об'ємі dv за рахунок внутрішніх джерел теплоти; dQ – зміна внутрішньої енергії або ентальпії речовини, що міститься в об'ємі dv за час $d\tau$. Для знаходження складових рівняння (1.1) виділимо в тілі елементарний об'єм у вигляді паралелепіпеда зі сторонами dx , dy , dz (рис. 1.1). Паралелепіпед розташуємо так, щоб його грані були паралельними координатним площинам.

Кількість теплоти, яка підводиться до граней елементарного об'єму за час $d\tau$ у напрямку осей Ox , Oy , Oz позначимо через dQ_x , dQ_y , dQ_z . Кількість теплоти, що відводиться крізь протилежні грані, позначимо через dQ_{x+dx} , dQ_{y+dy} , dQ_{z+dz} . Кількість теплоти, що підводиться до грані $dydz$ у напрямку осі Ox за час $d\tau$ дорівнює $dQ_x = q_x dydz d\tau$, де q_x – проекція густини теплового потоку в напрямку осі Ox . Кількість теплоти, що відводиться крізь протилежну грань елементарного об'єму dv у напрямку осі Ox , дорівнює

$$dQ_{x+dx} = q_{x+dx} dydzd\tau.$$

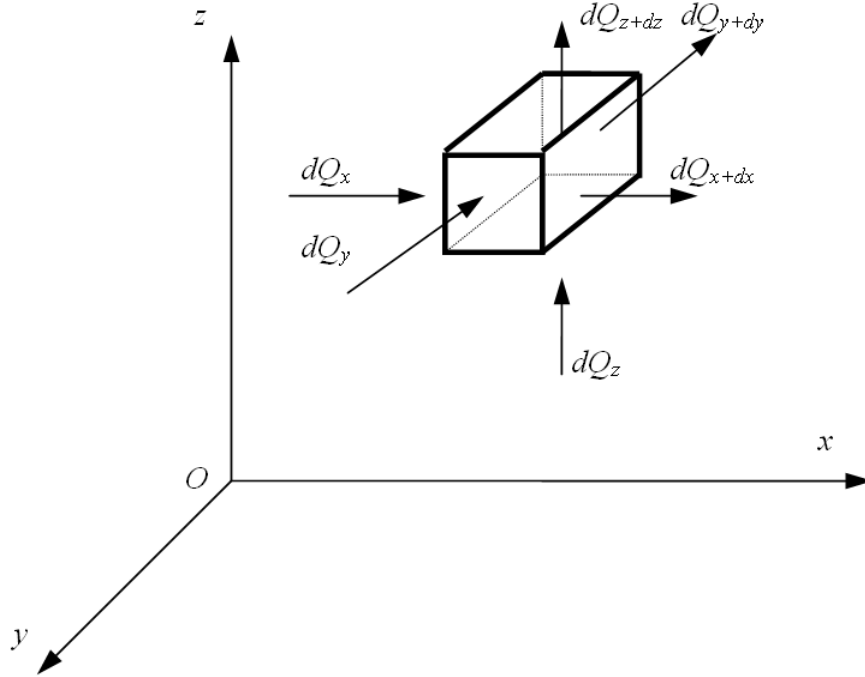


Рис. 1.1. Схема елементарного об'єму

Запишемо різницю між кількістю теплоти, що підводиться до елементарного об'єму dv і відводиться від нього в напрямку осі Ox

$$dQ_{x1} = dQ_x - dQ_{x+dx}$$

або

$$dQ_{x1} = q_x dydzd\tau - q_{x+dx} dydzd\tau. \quad (1.2)$$

Розкладемо функцію q_{x+dx} у ряд Тейлора на інтервалі dx

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx + \frac{\partial^2 q_x}{\partial x^2} \frac{dx^2}{2!} + \dots$$

Обмежимося першим порядком малості (тобто двома членами ряду). Тоді отримаємо

$$dQ_{x1} = \left[q_x - q_x - \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right] dydzd\tau = -\frac{\partial q_x}{\partial x} dx dydzd\tau, \text{ Дж} \quad (1.3)$$

Аналогічно для напрямків Oy та Oz отримаємо:

$$dQ_{y1} = -\frac{\partial q_y}{\partial y} dx dy dz d\tau, \text{ Дж} \quad (1.4)$$

$$dQ_{z1} = -\frac{\partial q_z}{\partial z} dx dy dz d\tau, \text{ Дж} \quad (1.5)$$

Тоді підведена кількість теплоти до об'єму dv буде рівнятися

$$dQ_1 = dQ_x + dQ_y + dQ_z = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) dx dy dz, \text{ Дж} \quad (1.6)$$

Кількість теплоти, що виділено за рахунок внутрішніх джерел теплоти в одиницю часу називають потужністю внутрішніх джерел теплоти q_v , Вт/м³

$$dQ_2 = q_v dx dy dz d\tau = q_v dv d\tau, \text{ Дж} \quad (1.7)$$

Величина dQ у (1.1) залежить від характеру термодинамічного процесу системи, що досліджується. При ізохорному процесі вся теплота, що підводиться до об'єму dv іде на зміну внутрішньої енергії речовини в об'ємі

$$dQ = dU, \quad u = u(t, v), \text{ Дж/кг} - \text{масова внутрішня енергія.}$$

Тоді

$$dU = C_v \frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau dv = c_v \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau dv, \text{ Дж} \quad (1.8)$$

де C_v – об'ємна ізохорна теплоємність, Дж/(м³·К); c_v – масова ізохорна теплоємність, Дж/(кг·К); ρ – густина речовини, кг/м³.

Підставляючи (1.6), (1.7) і (1.8) у (1.1) і скорочуючи ліву і праву частини рівняння на $dv d\tau = dx dy dz d\tau$, отримуємо:

$$c_v \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) + q_v, \text{ Вт/м}^3 \quad (1.9)$$

$$\text{або } c_v \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} = -\text{div} \vec{q} + q_v. \quad (1.10)$$

Вираз (1.9) називається *диференціальним рівнянням енергії* для ізохорного процесу.

У випадку ізобарного процесу переносу теплоти маємо

$$dQ_1 + dQ_2 = dH, \text{ Дж} \quad (1.11)$$

де H – ентальпія (міра тепловмісту речовини). $h = h(t, p)$ – масова ентальпія, Дж/кг.

Тоді

$$dH = C_p \frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau dv = c_p \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau dv = \rho \frac{\partial h}{\partial \tau} d\tau dv, \text{ Дж} \quad (1.12)$$

де C_p – об’ємна ізобарна теплоємність, Дж/(м³·К); c_p – масова ізобарна теплоємність, Дж/(кг·К); ρ – густина речовини, кг/м³.

Підставляючи (1.6), (1.7) і (1.12) у (1.11), отримуємо:

$$c_p \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} = \rho \frac{\partial h}{\partial \tau} = - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) + q_v, \text{ Вт/м}^3 \quad (1.13)$$

$$\text{або} \quad c_p \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} = -\text{div} \vec{q} + q_v. \quad (1.14)$$

Вираз (1.13) називається *диференціальним рівнянням енергії* для ізобарного процесу.

У твердих тілах перенос теплоти описується законом Фур’є $q = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n}$ (де \mathbf{n} – вектор зовнішньої нормалі до поверхні тіла). Також у твердих тілах відмінність між c_p і c_v мала величина і, тому вважають, що $c_p = c_v = c$.

Фізичний зміст теплоємності: теплоємність це фізична величина, яка характеризує теплову інертність речовини і чисельно дорівнює кількості теплоти, що необхідно для нагрівання 1 кг речовини на 1 К.

Фізичний зміст теплопровідності: теплопровідність це фізична величина, що характеризує інтенсивність теплообміну в речовині, тілі і чисельно дорівнює величині теплового потоку, який проходить у тілі між ізотермічними поверхнями з різницею температур в 1 К за відстані по нормалі між цими поверхнями в 1 м.

$$\text{Тому що } q_x = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x}; \quad q_y = -\lambda \frac{\partial t}{\partial y}; \quad q_z = -\lambda \frac{\partial t}{\partial z},$$

то можна записати

$$c_p \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial z} \right) + q_v, \text{ Вт/м}^3 \quad (1.15)$$

$$\text{або } c_p \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} = -\text{div}(-\lambda \text{grad} t) + q_v, \quad \rho \frac{\partial h}{\partial \tau} = -\text{div} \vec{q} + q_v, \text{ Вт/м}^3, \quad (1.16)$$

$$\text{або } \frac{\partial t}{\partial \tau} = -\frac{1}{c_p \rho} \operatorname{div} \vec{q} + \frac{q_v}{c_p \rho}, \quad \rho \frac{\partial h}{\partial \tau} = \nabla \cdot (\lambda \nabla t) + q_v, \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Вираз (1.15) називається диференціальним рівнянням теплопровідності для ізобарного процесу (у твердих тілах можна записати замість c_p просто c).

У загальному випадку фізичні параметри речовини залежать як від температури, так і від координат (c_p, c_v, ρ, λ можуть бути функціями t, x, y, z, τ). На практиці, у багатьох інженерних задачах цією залежністю можна знехтувати. Тоді диференціальне рівняння теплопровідності можна переписати так:

$$c_p \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} = \lambda \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) + q_v, \quad \text{Вт/м}^3 \quad (1.17)$$

$$\text{або } \frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) + \frac{q_v}{c_p \rho}, \quad \text{К/с}$$

де $a = \lambda / (c_p \rho)$ – температуропровідність речовини, $\text{м}^2/\text{с}$.

Фізичний зміст температуропровідності: температуропровідність це фізична величина, що характеризує швидкість зміни температури в речовині і є мірою теплоінерційності речовини.

Введемо оператор Лапласа, який у декартовій системі координат має вигляд

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right),$$

тоді рівняння (1.17) можна переписати у виді

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \nabla^2 t + \frac{q_v}{c_p \rho}, \quad \text{К/с.} \quad (1.18)$$

У циліндричній системі координат маємо, що

$$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2},$$

де r – радіус, м; φ – полярний кут, рад; z – апліката, м.

У сферичній системі координат оператор Лапласа набуває вигляду

$$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{\partial t}{\partial \mu} \right] + \frac{1}{r^2 (1 - \mu^2)} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2},$$

де r – радіус, м; $\mu = \cos \theta$; θ і φ – відповідно, полярна відстань й довгота, рад.

1.1.2. Умови однозначності

Диференціальне рівняння теплопровідності описує нескінченну множину процесів (задач) передачі теплоти. Тобто в загальному випадку дає загальне рішення диференціального рівняння (задачі), яке задовольняє будь-якому процесу теплопровідності. Для того, щоб отримати конкретне рішення (частинне) конкретної задачі теплопровідності необхідно задати крайові умови. У теорії теплопровідності крайові умови називають умовами однозначності.

Умови однозначності включають:

- геометричні умови – форма, розміри тіла, у яких протікає процес;
- фізичні умови – фізичні властивості тіла (ρ, c_p, λ);
- початкові умови – розподіл температур у початковий момент часу у всьому тілі;
- граничні умови (ГУ, умови на границі тіла) – взаємодія тіла з оточуючим середовищем.

Початкові умови необхідні тільки для розв'язання нестационарних задач теплопровідності й записуються як

$$t|_{\tau=0} = f(x, y, z), \text{ } ^\circ\text{C} \quad (1.19)$$

де x, y, z – координати точок тіла.

За рівномірного розподілу температури в тілі маємо

$$t|_{\tau=0} = t_0 = \text{const}, \text{ } ^\circ\text{C} \quad (1.20)$$

Граничні умови підрозділяються на декілька типів (родів).

1.1.2.1. Граничні умови I роду. Задається розподіл температур на границі тіла (крайові умови Дирихле) для моменту часу $\tau > 0$

$$t|_{\Gamma} = t_c = f_t(x, y, z, \tau), \text{ } ^\circ\text{C} \quad (1.21)$$

де $t|_{\Gamma}$, t_c – температура на границі, поверхні тіла.

При $t|_{\Gamma} \neq f_t(\tau)$ маємо, що $t|_{\Gamma} = t_c = \text{const}$.

1.1.2.2. Граничні умови II роду. Задається густина теплового потоку на границі тіла (крайові умови Неймана) при $\tau > 0$:

$$q|_{\Gamma} = q_{\Pi} = f_q(x, y, z, \tau), \text{ Вт/м}^2 \quad (1.22)$$

$$\text{або } -\lambda \frac{\partial t}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma} = q|_{\Gamma},$$

де $q|_{\Gamma}$, $q|_{\Pi}$ – густина теплового потоку на границі, поверхні тіла;
 $\mathbf{n}^T = (n_x \ n_y \ n_z)$ – вектор зовнішньої нормалі до поверхні тіла.

При $q|_{\Gamma} \neq f_q(\tau)$ маємо, що $q_{\Gamma} = q_{\Pi} = const$.

Граничні умови II роду передбачають обов'язкове задання рівня температури тіла. У нестационарній задачі це початкові умови. Тому для нестационарної задачі густину теплового потоку можна задавати на всій поверхні тіла. У випадку стаціонарної задачі, хоча б у одній точці поверхні тіла повинні бути задані інші умови, наприклад, I роду.

1.1.2.3. Граничні умови III роду (*граничні умови конвективного теплообміну*) – задається температура оточуючого середовища (рідини або газу) t_p і закон теплообміну між поверхнею тіла й рідиною – закон Ньютона-Ріхмана, який формулюється таким чином: густина теплового потоку пропорційна різниці температур між поверхнею тіла й рідиною:

$$q|_{\Gamma} = q_{\Pi} = \alpha(t_c - t_p), \text{ Вт/м}^2 \quad (1.23)$$

$$\text{або } -\lambda \frac{\partial t}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma} = \alpha(t_c - t_p),$$

де α – коефіцієнт тепловіддачі, Вт/(м²·К); \mathbf{n} – вектор зовнішньої нормалі до поверхні тіла.

Фізичний зміст α : коефіцієнт тепловіддачі це фізична величина, яка характеризує інтенсивність теплообміну між поверхнею твердого тіла й рідиною і чисельно дорівнює кількості теплоти, що віддається (або сприймається) поверхнею в 1 м² за одиницю часу при різниці температур в 1 К між поверхнею тіла й рідиною (або газом).

Граничні умови радіаційного типу: Ці умови мають місце, коли задана система тіл, яка розділена діатермічним середовищем (тобто середовищем, що не поглинає ІЧ-випромінювання). Задається температура T_{c2} (К) другого тіла, яке розташовано на певній відстані від даного тіла, і закон радіаційного теплообміну між тілами на основі закону Стефана-Больцмана

$$-\lambda \frac{\partial t}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma} = \sigma \epsilon_{\text{пр}} (T_{c1}^4 - T_{c2}^4), \text{ Вт/м}^2 \quad (1.24)$$

де $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}$ Вт/(м²·К⁴) – стала Стефана-Больцмана; $\epsilon_{\text{пр}} = \frac{1}{\frac{1}{\epsilon_{c1}} + \frac{1}{\epsilon_{c2}} - 1}$ –

приведена ступінь чорноти системи тіл; T_{c1} і T_{c2} – температури поверхні тіл,

K ; ε_{c1} і ε_{c2} – ступінь чорноти поверхні тіл.

Граничні умови конвективного й радіаційного типів можуть задаватися спільно.

1.1.2.4. Граничні умови IV роду. Ці умови мають місце за умови абсолютного контакту двох тіл з різними фізичними властивостями. Математичний запис умов IV роду має вид

$$\left. \begin{aligned} t(x, y, z, \tau)|_{\Gamma^-} &= t(x, y, z, \tau)|_{\Gamma^+} \\ \lambda_1 \frac{\partial t}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma^-} &= \lambda_2 \frac{\partial t}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma^+} \end{aligned} \right\}, \quad (1.25)$$

де індекс 1 і «-» відноситься до першого тіла, а індекс 2 і «+» – до другого.

При врахуванні контактного термічного опору форма запису (1.25) дещо змінюється тому, що внаслідок наявності контактного термічного опору на границі між тілами виникає стрибок температури, що в результаті призводить до таких співвідношень

$$\left\{ \begin{aligned} \{t\} &= \mathbf{n} \cdot (r_\lambda \mathbf{q}); \\ \{\mathbf{n} \cdot \mathbf{q}\} &= 0, \end{aligned} \right. \quad (1.26)$$

де $\{t\} = t^+ - t^-$; $\{\mathbf{n} \cdot \mathbf{q}\} = \mathbf{n}^+ \cdot \mathbf{q}^+ - \mathbf{n}^- \cdot \mathbf{q}^-$; $\mathbf{q} = -\lambda(t) \nabla t$ – вектор густини теплового потоку, Вт/м²; r_λ – контактний термічний опір, (м²·К)/Вт; \mathbf{n} – вектор нормалі до поверхні.

Таким чином диференціальне рівняння теплопровідності (1.18) спільно із заданими умовами однозначності (1.19)–(1.26) дає повне математичне формулювання крайової задачі теплопровідності. Сформульовану задачу можна розв'язувати або аналітичним способом для простіших випадків (теплообмін у плоскій або циліндричній стінках та ін.), або числовими методами (що буде розглянуто далі).

1.2. Конвективний теплообмін. Система рівнянь нерозривності, руху та енергії. Крайові умови

Для описання процесів переносу теплоти в рідинах у загальному випадку можна скористатися такими диференціальними рівняннями в частинних похідних: нерозривності, руху, енергії та ін.

Системою цих рівнянь описується теплообмін як при вільній, так і у випадку примусової конвекції. Вільна конвекція виникає в рідині за рахунок дії гравітаційних сил у неізотермічній рідині. Примусова конвекція виникає в рідині за рахунок її примусового руху в полі градієнта температури. Взагалі розрізняють більшу кількість видів конвекції: термогравітаційну – або вільну;

термокапілярну, яка виникає внаслідок дії сил поверхневого натягу; концентраційну, яка виникає під дією градієнта концентрації речовини, що розчинена в рідині; термомагнітну, яка виникає в магнітних рідинах під дією магнітного поля в полі гравітації; гранульну, яка виникає в сипучому неоднорідному середовищі.

У цьому пункті наведено виведення диференціальних рівнянь нерозривності, руху і енергії та описано зміст і розуміння поняття «крайові умови». При викладенні матеріалу за основу взято підручник Юдаєва Б.М. [2] і матеріали монографії [35].

1.2.1. Рівняння нерозривності

В основі цього рівняння лежить закон збереження маси. Для нерухомого елементарного об'єму ($dx dy dz$), який виділено в потоці рідини (рис. 1.2), закон збереження маси можна представити в такій формі

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{швидкість} \\ \text{накопичення} \\ \text{маси} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{швидкість} \\ \text{притоку} \\ \text{маси} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{швидкість} \\ \text{витоку} \\ \text{маси} \end{array} \right\}. \quad (1.27)$$

Напишемо рівняння (1.27) для двох граней елементарного об'єму, перпендикулярних осі x :

– швидкість притоку маси крізь елементарну грань ($dy dz$), що розташована на відстані x від початку координат, дорівнює

$$(\rho v_x)|_x dy dz;$$

– швидкість витоку маси крізь елементарну грань ($dy dz$), що розташована на відстані $x + dx$ від початку координат, дорівнює

$$(\rho v_x)|_{x+dx} dy dz.$$

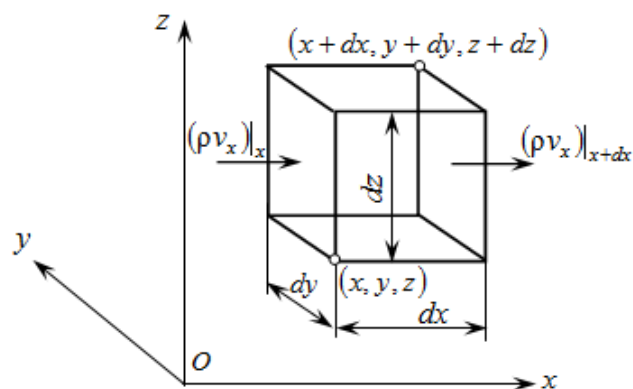


Рис. 1.2. До виводу рівняння нерозривності

Аналогічні вирази можна записати для двох інших пар граней.
Швидкість накопичення маси всього елементарного об'єму дорівнює

$$(dxdydz)\frac{\partial\rho}{\partial\tau}.$$

Підставимо отримані вирази у (1.27)

$$\begin{aligned} dxdydz\frac{\partial\rho}{\partial\tau} &= dydz[(\rho v_x)|_x - (\rho v_x)|_{x+dx}] + \\ &+ dx dz[(\rho v_y)|_y - (\rho v_y)|_{y+dy}] + dxdy[(\rho v_z)|_z - (\rho v_z)|_{z+dz}] \end{aligned} \quad (1.28)$$

Аналогічно (1.3) скористаємося розкладанням членів $(\rho v_x)|_{x+dx}$, $(\rho v_y)|_{y+dy}$ і $(\rho v_z)|_{z+dz}$ у ряд Тейлора до 1-го порядку малості. У результаті отримаємо такі співвідношення:

$$\begin{aligned} dydz[(\rho v_x)|_x - (\rho v_x)|_{x+dx}] &= dydz\left[(\rho v_x)|_x - (\rho v_x)|_x - \frac{\partial\rho v_x}{\partial x}dx\right] = -\frac{\partial\rho v_x}{\partial x}dxdydz; \\ dx dz[(\rho v_y)|_y - (\rho v_y)|_{y+dy}] &= dx dz\left[(\rho v_y)|_y - (\rho v_y)|_y - \frac{\partial\rho v_y}{\partial y}dy\right] = -\frac{\partial\rho v_y}{\partial y}dxdydz; \\ dxdy[(\rho v_z)|_z - (\rho v_z)|_{z+dz}] &= dxdy\left[(\rho v_z)|_z - (\rho v_z)|_z - \frac{\partial\rho v_z}{\partial z}dz\right] = -\frac{\partial\rho v_z}{\partial z}dxdydz; \end{aligned}$$

Після підстановки останніх виразів у (1.28) отримаємо

$$dxdydz\frac{\partial\rho}{\partial\tau} = -\frac{\partial\rho v_x}{\partial x}dxdydz - \frac{\partial\rho v_y}{\partial y}dxdydz - \frac{\partial\rho v_z}{\partial z}dxdydz.$$

Розділимо всі члени останнього рівняння на елементарний об'єм $(dxdydz)$. У результаті отримаємо

$$\frac{\partial\rho}{\partial\tau} = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\rho v_x + \frac{\partial}{\partial y}\rho v_y + \frac{\partial}{\partial z}\rho v_z\right). \quad (1.29)$$

Рівняння (1.29) називають рівнянням нерозривності. Величина $\rho\mathbf{V}$ – дістала назву вектора масової швидкості, де $\mathbf{V}^T = (v_x, v_y, v_z)$.

Рівняння (1.29) у векторній формі має вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial\tau} = -(\nabla \cdot \rho\mathbf{V}) \text{ або } \frac{\partial\rho}{\partial\tau} + (\nabla \cdot \rho\mathbf{V}) = 0. \quad (1.30)$$

Член $(\nabla \cdot \rho\mathbf{V})$ називають дивергенцією $\rho\mathbf{V}$ та записують як $\text{div}(\rho\mathbf{V})$. Відмітимо, що вектор $\rho\mathbf{V}$ представляє собою потік маси та його дивергенція є

швидкість розтікання (витоку) маси на одиницю об'єму.

Рівняння (1.30) встановлює, що зростання густини нерухомого елементарного об'єму дорівнює швидкості втікання маси в цей елемент, поділений на об'єм.

Рівняння (1.29) можна записати дещо в іншій формі. Виконаємо диференціювання правої частини (1.29), і перенесемо всі похідні від ρ у ліву його частину. У результаті отримаємо

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} = -\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right). \quad (1.31)$$

Ліва частина рівняння (1.31) представляє собою субстанціональну похідну, тому це рівняння можна представити в такій більш компактній формі

$$\frac{D\rho}{D\tau} = -\rho(\nabla \cdot \mathbf{V}). \quad (1.32)$$

В окремому випадку, коли $\rho = \text{const}$ (нестислива рідина), рівняння (1.32) приймає вид

$$(\nabla \cdot \mathbf{V}) = 0. \quad (1.33)$$

Ліва частина рівняння (1.32) буде дорівнювати нулю, якщо густина елементарного об'єму буде залишатися незмінною під час його руху разом з потоком рідини.

1.2.2. Рівняння руху

Рівняння балансу кількості руху для елементарного об'єму ($dx dy dz$) (рис. 1.3) рідини можна записати в такій формі

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{швидкість} \\ \text{накопичення} \\ \text{кількості руху в} \\ \text{елементі об'єму} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{швидкість} \\ \text{приходу} \\ \text{кількості руху в} \\ \text{елемент об'єму} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{швидкість} \\ \text{виходу} \\ \text{кількості руху із} \\ \text{елемента об'єму} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{сума сил,} \\ \text{що діють} \\ \text{на елемент} \\ \text{об'єму} \end{array} \right\}. \quad (1.34)$$

У загальному випадку при невстановленому стані рідина може входити в елементарний об'єм і виходити з нього крізь усі шість граней у довільних напрямках.

Відмітимо, що рівняння (1.34) є векторним, тому можна написати компоненти рівняння руху для кожного із координатних напрямків (x, y, z) окремо. Для цього складемо вирази x -компоненти для кожного члена рівняння (1.34), а для y і z -компонент запишемо по аналогії.

Виразимо через параметри потоку швидкість приходу кількості руху

всередину елементарного об'єму й виходу з нього для x -компоненти (див. рис. 1.3).

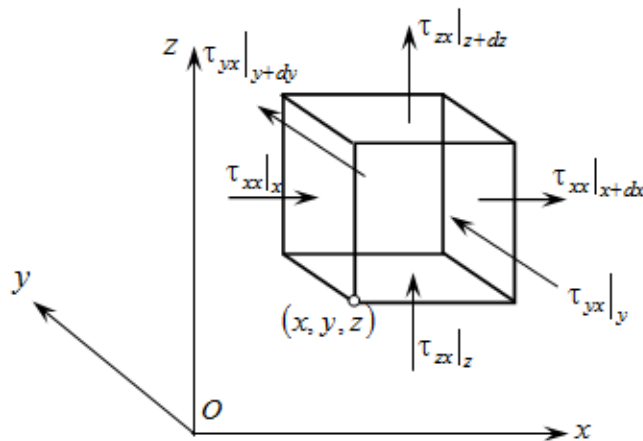


Рис. 1.3. До виведення рівняння руху

Розрізняють два механізми переносу кількості руху в рідині:

а) конвективний перенос здійснюється елементарними об'ємами рідини, що рухаються;

б) молекулярний перенос здійснюється молекулами під дією градієнта швидкості.

Швидкість приходу кількості руху за рахунок конвективного переносу крізь ліву елементарну грань ($dydz$) елементарного об'єму, яка є перпендикулярною осі Ox і розташована на відстані x від початку координат, дорівнює

$$\rho v_x v_x|_x dydz, \quad (1.35)$$

а швидкість виходу крізь праву елементарну грань ($dydz$), яка розташована на відстані $x + dx$ від початку координат, дорівнює

$$\rho v_x v_x|_{x+dx} dydz. \quad (1.36)$$

Швидкість приходу кількості руху крізь передню елементарну грань ($dx dz$), яка є перпендикулярною осі Oy , дорівнює

$$\rho v_y v_x|_y dx dz, \quad (1.37)$$

а швидкість виходу крізь елементарну грань ($dx dz$), яка розташована на відстані $z + dz$ від початку координат, дорівнює

$$\rho v_y v_x|_{y+dy} dx dz. \quad (1.38)$$

Аналогічним чином можна записати відповідні співвідношення для граней ($dx dy$)

$$\rho v_z v_x|_z dxdy, \rho v_z v_x|_{z+dz} dxdy. \quad (1.39)$$

Швидкість накопичення кількості руху (x -компоненти) в елементарному об'ємі під час конвективного переносу визначається сумуванням по всіх шести гранях величин (1.35)–(1.39)

$$\begin{aligned} & dydz(\rho v_x v_x|_x - \rho v_x v_x|_{x+dx}) + \\ & + dx dz(\rho v_y v_x|_y - \rho v_y v_x|_{y+dy}) + \\ & + dxdy(\rho v_z v_x|_z - \rho v_z v_x|_{z+dz}) \end{aligned} \quad (1.40)$$

Швидкість приходу кількості руху (x -компоненти) молекулярним переносом крізь елементарну ліву грань ($dydz$) елементарного об'єму (див. рис. 1.3), дорівнює

$$\bar{\tau}_{xx}|_x dydz, \quad (1.41)$$

а швидкість витоку крізь праву грань ($dydz$)

$$\bar{\tau}_{xx}|_{x+dx} dydz. \quad (1.42)$$

Швидкість приходу крізь елементарну передню грань ($dxdz$), дорівнює

$$\bar{\tau}_{yx}|_y dxdz. \quad (1.43)$$

Відмітимо, що $\bar{\tau}_{yx}$ змінює кількість руху (x -компоненти) шляхом впливу крізь грань ($dxdz$), яка є перпендикулярною осі Oy .

Подібним чином можна написати співвідношення для напружень для трьох інших граней елементарного об'єму.

Сумуючи величини (1.41)–(1.43) для всіх шести граней елементарного об'єму, отримаємо

$$\begin{aligned} & dydz(\bar{\tau}_{xx}|_x - \bar{\tau}_{xx}|_{x+dx}) + dx dz(\bar{\tau}_{yx}|_y - \bar{\tau}_{yx}|_{y+dy}) + \\ & + dxdy(\bar{\tau}_{zx}|_z - \bar{\tau}_{zx}|_{z+dz}) \end{aligned} \quad (1.44)$$

Тут $\bar{\tau}_{xx}$ – нормальне напруження на грані елементарного об'єму, яка перпендикулярна осі Ox . Це напруження виникає від сили тертя у в'язкій рідині під дією нерівномірного розподілу швидкості в потоці.

Величини $\bar{\tau}_{yx}, \bar{\tau}_{zx}$ – тангенціальні або дотичні напруження на гранях елементарного об'єму, що перпендикулярні осям Oy і Oz , відповідно; вони направлені вздовж осі Ox . Ці напруження також виникають від сил тертя.

У багатьох випадках найбільш важливими силами будуть ті, які вини-

кають від тиску рідини p і гравітації, що визначається прискоренням вільного падіння g . Проекції на вісь Ox цих сил, що прикладені до елементарного об'єму рідини, дорівнюють

$$dydz(p|_x - p_{x+dx}) + \rho g_x dx dy dz. \quad (1.45)$$

Тиск у рідині, що рухається, визначається рівнянням стану, яке є скалярним.

Швидкість накопичення кількості руху (x -компоненти) елементарним об'ємом рідини в цілому (ліва частина рівняння (1.34)) може бути представлена у формі

$$dx dy dz \frac{\partial \rho v_x}{\partial \tau}. \quad (1.46)$$

Тепер підставимо знайдені складові рівняння (1.34), попередньо скориставшись процедурою розкладання в ряд Тейлора до 1-го порядку малості всіх членів з повними диференціалами (аналогічно виводу рівняння нерозривності), і розділимо ліву та праву частини отриманого рівняння на $dx dy dz$. У результаті отримаємо рівняння руху для x -компоненти швидкості

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho v_x}{\partial \tau} = & - \left(\frac{\partial}{\partial x} \rho v_x v_x + \frac{\partial}{\partial y} \rho v_y v_x + \frac{\partial}{\partial z} \rho v_z v_x \right) - \\ & - \left(\frac{\partial}{\partial x} \bar{\tau}_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{\tau}_{yx} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{\tau}_{zx} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Так само можна отримати рівняння для y - і z -компонент швидкості:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho v_y}{\partial \tau} = & - \left(\frac{\partial}{\partial x} \rho v_x v_y + \frac{\partial}{\partial y} \rho v_y v_y + \frac{\partial}{\partial z} \rho v_z v_y \right) - \\ & - \left(\frac{\partial}{\partial x} \bar{\tau}_{xy} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{\tau}_{yy} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{\tau}_{zy} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y. \end{aligned} \quad (1.48)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho v_z}{\partial \tau} = & - \left(\frac{\partial}{\partial x} \rho v_x v_z + \frac{\partial}{\partial y} \rho v_y v_z + \frac{\partial}{\partial z} \rho v_z v_z \right) - \\ & - \left(\frac{\partial}{\partial x} \bar{\tau}_{xz} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{\tau}_{yz} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{\tau}_{zz} \right) - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z. \end{aligned} \quad (1.49)$$

де $(\rho v_x, \rho v_y, \rho v_z)$ – компоненти вектора масової швидкості $\rho \mathbf{V}$, кг/(м²·с);
 (g_x, g_y, g_z) – компоненти вектора гравітаційного прискорення, м/с²;

$\left(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}\right)$ – компоненти градієнта тиску ∇p або $\text{grad} p$, Па/м;

$\begin{pmatrix} \rho v_x v_x & \rho v_x v_y & \rho v_x v_z \\ \rho v_y v_x & \rho v_y v_y & \rho v_y v_z \\ \rho v_z v_x & \rho v_z v_y & \rho v_z v_z \end{pmatrix}$ – дев'ять компонентів конвективного потоку кількості

руху, кг/(м·с²); $\begin{pmatrix} \bar{\tau}_{xx} & \bar{\tau}_{xy} & \bar{\tau}_{xz} \\ \bar{\tau}_{yx} & \bar{\tau}_{yy} & \bar{\tau}_{yz} \\ \bar{\tau}_{zx} & \bar{\tau}_{zy} & \bar{\tau}_{zz} \end{pmatrix}$ – дев'ять компонентів тензора напружень, Па.

Рівняння (1.47)–(1.49) можна записати в більш компактній векторній формі

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \rho \mathbf{V} = -(\rho \mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} - \nabla p - (\nabla \cdot \bar{\tau}) + \rho \mathbf{g}. \quad (1.50)$$

Фізичний зміст членів рівняння (1.50) такий

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{швидкість} \\ \text{зростання кількості} \\ \text{руху на} \\ \text{одиночку об'єму} \end{array} \right\} = - \left\{ \begin{array}{l} \text{швидкість} \\ \text{приросту кількості} \\ \text{руху за рахунок} \\ \text{конвекції} \\ \text{на одиницю об'єму} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{сила тиску} \\ \text{на одиницю} \\ \text{об'єму} \end{array} \right\} -$$

$$- \left\{ \begin{array}{l} \text{швидкість} \\ \text{приросту кількості} \\ \text{руху за рахунок} \\ \text{молекулярного} \\ \text{переносу} \\ \text{на одиницю об'єму} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{гравітаційна} \\ \text{сила на} \\ \text{одиночку} \\ \text{об'єму} \end{array} \right\}.$$

Тут члени $[(\rho \mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}]$ і $[\nabla \cdot \bar{\tau}]$ не є простими дивергенціями, тому що величина $\rho \mathbf{V} \mathbf{V}$ і $\bar{\tau}$ представляють собою тензори. Фізичний зміст $[(\rho \mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}]$ можна показати порівнюючи його з членом $\nabla \cdot \rho \mathbf{V}$.

Величина $[\nabla \cdot \rho \mathbf{V}]$ визначає швидкість втрати маси (скаляр) потоком рідини на одиницю об'єму, а величина $[(\rho \mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}]$ – швидкість втрати кількості руху (вектор) потоком рідини на одиницю об'єму.

Рівняння (1.47) може бути перетворено за допомогою рівняння нерозривності таким чином

$$\rho \frac{Dv_x}{D\tau} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \left(\frac{\partial \bar{\tau}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\tau}_{zx}}{\partial z} \right) + \rho g_x, \quad (1.51)$$

де $Dv_x/D\tau$ – субстанціональна похідна компоненти від швидкості v_x за часом.

Так само можна отримати рівняння для y - і z -компонент швидкості. Після об'єднання трьох компонентів в одне векторне рівняння, отримаємо

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{D\tau} = -\nabla p - (\nabla \cdot \bar{\tau}) + \rho \mathbf{g}. \quad (1.52)$$

Фізичний зміст членів рівняння (1.52) такий

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{прискорення} \\ \text{маси на} \\ \text{одiniцю об'єму} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{сила тиску} \\ \text{на одiniцю} \\ \text{об'єму} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{сили в'язкого} \\ \text{тертя на} \\ \text{одiniцю} \\ \text{об'єму} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{сила гравітації} \\ \text{на одiniцю} \\ \text{об'єму} \end{array} \right\}.$$

У цій формі запису рівняння руху встановлює, що елементарний об'єм, що переміщується з рідиною, прискорюється тому, що на нього діють сили. Іншими словами ця форма виражає другий закон Ньютона в явній формі: маса \times прискорення = сума сил. Ми бачимо, що рівняння балансу кількості енергії повністю еквівалентно другому закону Ньютона. Відмітимо, що дві форми рівняння руху (1.50) і (1.52) схожі на дві форми рівняння нерозривності (1.30) і (1.32) у тому сенсі, що в кожному випадку перша форма показує баланс елементарного об'єму рідини, який зафіксовано у просторі, а друга для елементарного об'єму, який переміщається з рухомою рідиною.

Визначимо у рівнянні (1.52) член $(\nabla \cdot \bar{\tau})$. Для цього використаємо такі залежності

$$\bar{\tau}_{xx} = -2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{V}), \quad (1.53)$$

де μ – динамічна в'язкість або коефіцієнт внутрішнього тертя, Па·с; (з фізичної точки зору динамічна в'язкість представляє собою об'ємну силу тертя за градієнта швидкості, рівного одинокій – відповідно до закону в'язкості Ньютона (1.53)–(1.58))

$$\bar{\tau}_{yy} = -2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{V}); \quad (1.54)$$

$$\bar{\tau}_{zz} = -2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{V}); \quad (1.55)$$

$$\bar{\tau}_{xy} = \bar{\tau}_{yx} = -\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right); \quad (1.56)$$

$$\bar{\tau}_{yz} = \bar{\tau}_{zy} = -\mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right); \quad (1.57)$$

$$\bar{\tau}_{zx} = \bar{\tau}_{xz} = -\mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right). \quad (1.58)$$

В основі цих залежностей лежить закон тертя Стокса (закон в'язкості Ньютона), який стверджує: сили, що виникають під час деформації краплинних рідин і газів, пропорційні швидкості деформації.

Підставляючи рівняння (1.53)–(1.58) у рівняння (1.51) і, розповсюджуючи отриманий результат на y - і z -компоненти швидкості, отримуємо:

$$\begin{aligned} \rho \frac{Dv_x}{D\tau} = & -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{V}) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \right] + \rho g_x; \end{aligned} \quad (1.59)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{Dv_y}{D\tau} = & -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{V}) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \right] + \rho g_y; \end{aligned} \quad (1.60)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{Dv_z}{D\tau} = & -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{V}) \right] + \rho g_z; \end{aligned} \quad (1.61)$$

Ці рівняння разом з рівнянням нерозривності, рівнянням стану $p = p(\rho)$, залежністю в'язкості від густини $\mu = \mu(\rho)$ і крайовими умовами повністю визначають тиск, густину й компоненти швидкості ізотермічної рідини.

Велике значення для практичних розрахунків мають окремі випадки отриманих рівнянь. Для потоку рідини з постійною густиною ρ і в'язкістю μ справедливо ($\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$) (див. рівняння (1.33)) і рівняння (1.52) приймає вигляд

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{D\tau} = -\nabla p + \mu \nabla \cdot (\nabla \mathbf{V}) + \rho \mathbf{g}. \quad (1.62)$$

Рівняння (1.62) у декартових координатах має вид:

$$\rho \frac{Dv_x}{D\tau} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + \rho g_x; \quad (1.63)$$

$$\rho \frac{Dv_y}{D\tau} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) + \rho g_y; \quad (1.64)$$

$$\rho \frac{Dv_z}{D\tau} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + \rho g_z. \quad (1.65)$$

Рівняння (1.63)–(1.65) називають рівняннями Нав'є-Стокса.

Для окремого випадку ($\nabla \cdot \bar{\tau} = 0$) рівняння (1.52) приймає вид

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{D\tau} = -\nabla p + \rho \mathbf{g}. \quad (1.66)$$

Рівняння (1.66) називають рівнянням Ейлера. Це рівняння застосовують у тих випадках, коли впливом вязкості в потоці рідини можна знехтувати.

1.2.3. Рівняння механічної енергії

Рівняння руху можна використати для опису взаємоперетворення форм енергії в будь-якій точці рідини, що тече.

Сформулюємо рівняння, подібне за формою до (1.52), але введемо в нього скалярну величину, яка обумовлена локальною швидкістю \mathbf{V}

$$\rho \frac{D}{D\tau} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{V}|^2 \right) = -(\mathbf{V} \cdot \nabla p) - (\mathbf{V} \cdot [\nabla \cdot \bar{\tau}]) + \rho(\mathbf{V} \cdot \mathbf{g}). \quad (1.67)$$

Це скалярне рівняння описує швидкість зміни кінетичної енергії $\left(\frac{1}{2} |\mathbf{V}|^2 \right)$ на одиницю об'єму рідини, що рухається.

Перепишемо рівняння (1.67) у формі, яка є більш зручною для подальшого його дослідження; використовуючи рівняння нерозривності, запишемо субстанціональну похідну через частинну похідну за часом $\partial/\partial\tau$; кожний із членів, що описують дію тиску і в'язкості, розділимо на два. Всі члени в результатуючому рівнянні запишемо для нерухомого елемента об'єму, крізь який протікає рідина

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\tau} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{V}|^2 \right) = & - \left(\nabla \cdot \frac{1}{2} \rho |\mathbf{V}|^2 \mathbf{V} \right) - (\nabla \cdot p \mathbf{V}) - \\ & - p(-\nabla \cdot \mathbf{V}) - (\nabla \cdot [\bar{\tau} \cdot \mathbf{V}]) - (-\bar{\tau} : (\nabla \mathbf{V})) + \rho(\mathbf{V} \cdot \mathbf{g}). \end{aligned} \quad (1.68)$$

де $:$ – оператор подвійного скалярного добутку тензора на градієнт вектора.

Фізичний зміст членів рівняння (1.68) такий

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{array}{l} \text{швидкість зростання} \\ \text{кінетичної енергії на} \\ \text{одиницю об'єму} \end{array} \right\} = - \left\{ \begin{array}{l} \text{швидкість підводу} \\ \text{кінетичної енергії за} \\ \text{рахунок потоку маси} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{швидкість} \\ \text{виробництва} \\ \text{роботи за рахунок} \\ \text{сил тиску на} \\ \text{одиницю об'єму} \end{array} \right\} - \\
 & - \left\{ \begin{array}{l} \text{швидкість рівноважного} \\ \text{перетворення роботи} \\ \text{тиску у внутрішню} \\ \text{енергію} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{швидкість} \\ \text{виробництва} \\ \text{роботи за рахунок} \\ \text{сил в'язкого тертя на} \\ \text{одиницю об'єму} \end{array} \right\} - \\
 & - \left\{ \begin{array}{l} \text{швидкість} \\ \text{нерівноважного} \\ \text{перетворення роботи} \\ \text{сил в'язкого у} \\ \text{внутрішню енергію} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{швидкість} \\ \text{виробництва} \\ \text{роботи гравітаційними} \\ \text{силами на} \\ \text{одиницю об'єму} \end{array} \right\}.
 \end{aligned}$$

Відмітимо, що член $(-\bar{\tau} : \nabla \mathbf{V})$ у рівнянні (1.68) є завжди додатний, тому що може бути записаний як сума квадратів деяких членів

$$(-\bar{\tau} : \nabla \mathbf{V}) = \mu \Phi_V = \frac{1}{2} \mu \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left[\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{V}) \delta_{ij} \right]^2, \quad (1.69)$$

де δ_{ij} – символ Кронекера.

$$\begin{aligned}
 \Phi_V = & 2 \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \\
 & + \left[\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right]^2 + \left[\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right]^2 + \\
 & + \left[\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right]^2 - \frac{2}{3} \left[\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right]^2.
 \end{aligned} \quad (1.70)$$

Функцію Φ_V називають дисипативною функцією, яка представляє собою кількість теплоти, що виникає в потоці в'язкої рідини за рахунок нерівноважної роботи сил внутрішнього (в'язкого) тертя, і виражається через градієнт швидкості.

Отже, член $(-\bar{\tau} : \nabla \mathbf{V})$ завжди додатний, а це значить, що у всіх потоках рідини, здійснюється деградація механічної енергії в теплову і, тому реальні процеси нерівноважні. За відсутності члена $(\bar{\tau} : \nabla \mathbf{V})$ всі форми енергії, що входять у рівняння (1.68) – кінетична, внутрішня й потенціальна, можуть повністю переходити із одної в іншу. Присутність членів $p(\nabla \cdot \mathbf{V})$ і $(\bar{\tau} : \nabla \mathbf{V})$ у рівнянні (1.68) говорить про те, що в рідині може здійснюватись внутрішнє нагрівання (охолодження). Отже, коли говорять «ізотермічна система», то мають на увазі таку систему, у якій теплота генерується (поглинається) так, що не спричинює зміни її температури.

Явища, які враховуються членом $p(\nabla \cdot \mathbf{V})$, можуть бути причиною значної зміни температури газів, які дуже швидко розширюються або стискаються, наприклад, у компресорах, турбінах та ін.

Явища, які враховуються членом $(\bar{\tau} : \nabla \mathbf{V})$, пов'язані з причиною значної зміни температури тільки в потоках з великою швидкістю, у яких має місце великий градієнт температури, наприклад, під час надзвукового польоту, швидкого видавлювання (штамповці) і змащення підшипників.

Як вже відмічалось, система рівнянь нерозривності (1.29), руху (1.59)–(1.61) і стану в формі $p = p(\rho)$ використовуються для описання ізотермічних процесів у рідині, що тече. Якщо під час зміни густини й тиску змінюється й температура (неізотермічний процес), то до системи рівнянь нерозривності й руху треба додати рівняння стану у формі $F(p, \rho, T) = 0$.

Для ідеального газу рівняння стану має вигляд

$$p = \rho RT. \quad (1.71)$$

1.2.4. Рівняння енергії

В основі рівняння енергії лежить закон збереження енергії (див. п 1.1)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{швидкість} \\ \text{накопичення} \\ \text{внутрішньої і} \\ \text{кінетичної} \\ \text{енергії} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{швидкість притоку} \\ \text{внутрішньої і кінетичної} \\ \text{енергії шляхом} \\ \text{конвекції} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{швидкість витоку} \\ \text{внутрішньої і кінетичної} \\ \text{енергії шляхом} \\ \text{конвекції} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{швидкість} \\ \text{підводу теплоти} \\ \text{за рахунок} \\ \text{теплопровідності} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{швидкість} \\ \text{виробництва} \\ \text{роботи системою} \\ \text{над оточуючим} \\ \text{середовищем} \end{array} \right\}. \quad (1.72)$$

Розглянемо нерухомий елементарний об'єм, крізь який тече однорідна рідина. Запишемо закон збереження енергії для рідини, яка міститься всередині виділеного елемента об'єму в даний момент часу

У рівнянні (1.72) під кінетичною енергією розуміється енергія руху рідини ($\frac{1}{2}\rho|\mathbf{V}|^2$ на одиницю об'єму). Під внутрішньою енергією рідини розуміється сума внутрішньої кінетичної енергії теплового руху молекул і внутрішньої потенціальної енергії взаємодії між молекулами. Внутрішня енергія рідини залежить від її локальної температури й густини. Потенціальна енергія потоку рідини не входить у рівняння (1.72) у явному вигляді, тому що вона включена в термін «робота».

Запишемо вирази для окремих членів, що входять у рівняння (1.72).

Швидкість накопичення внутрішньої кінетичної енергії елементарного об'єму $dx dy dz$ (див. рис. 1.3) дорівнює

$$dx dy dz \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\rho u + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{V}|^2 \right), \quad (1.73)$$

де u – внутрішня енергія рідини на одиницю її маси, Дж/кг; \mathbf{V} – вектор локальної швидкості, м/с.

Результуюча швидкість приходу внутрішньої й кінетичної енергії в елементарний об'єм дорівнює

$$\begin{aligned} & dy dz \left\{ v_x \left(\rho u + \frac{1}{2} |\mathbf{V}|^2 \right) \Big|_x - v_x \left(\rho u + \frac{1}{2} |\mathbf{V}|^2 \right) \Big|_{x+dx} \right\} + \\ & + dx dz \left\{ v_y \left(\rho u + \frac{1}{2} |\mathbf{V}|^2 \right) \Big|_y - v_y \left(\rho u + \frac{1}{2} |\mathbf{V}|^2 \right) \Big|_{y+dy} \right\} + \\ & + dx dy \left\{ v_z \left(\rho u + \frac{1}{2} |\mathbf{V}|^2 \right) \Big|_z - v_z \left(\rho u + \frac{1}{2} |\mathbf{V}|^2 \right) \Big|_{z+dz} \right\}. \end{aligned} \quad (1.74)$$

Швидкість підводу енергії в елементарний об'єм шляхом теплопровідності дорівнює

$$\begin{aligned} & dy dz \{ q_x|_x - q_x|_{x+dx} \} + dx dz \{ q_y|_y - q_y|_{y+dy} \} + \\ & + dx dy \{ q_z|_z - q_z|_{z+dz} \} \end{aligned} \quad (1.75)$$

де q_x, q_y, q_z – компоненти вектора густини теплового потоку \mathbf{q} .

Робота, що здійснюється елементарним об'ємом проти сил оточуючого середовища, складається з двох частин:

- робота проти об’ємних сил (тобто гравітації);
- робота проти поверхневих сил (тобто тиску й сили в’язкості).

Нагадаємо, що (робота) = (сили) × (шлях в напрямку дії сили), тому (швидкість виробництва роботи) = (сили) × (швидкість у напрямку дії сили).

Швидкість виробництва роботи проти трьох компонентів гравітаційної сили на одиницю об’єму дорівнює

$$-\rho dx dy dz (v_x g_x + v_y g_y + v_z g_z) \quad (1.76)$$

Знак «−» в (1.76) має місце тому, що робота виконується проти сили гравітації, тобто \mathbf{V} і \mathbf{g} мають протилежні напрямки.

Швидкість виробництва роботи проти статичного тиску p , що прикладений до шести граней елементарного об’єму $dx dy dz$, дорівнює

$$\begin{aligned} & dy dz \left\{ (pv_x)_{|_{x+dx}} - (pv_x)_{|_x} \right\} + dx dz \left\{ (pv_y)_{|_{y+dy}} - (pv_y)_{|_y} \right\} + \\ & + dx dy \left\{ (pv_z)_{|_{z+dz}} - (pv_z)_{|_z} \right\} \end{aligned} \quad (1.77)$$

Таким же чином знайдемо швидкість виробництва роботи проти сил в’язкості

$$\begin{aligned} & dy dz \left\{ (\bar{\tau}_{xx} v_x + \bar{\tau}_{xy} v_y + \bar{\tau}_{xz} v_z)_{|_{x+dx}} - (\bar{\tau}_{xx} v_x + \bar{\tau}_{xy} v_y + \bar{\tau}_{xz} v_z)_{|_x} \right\} + \\ & dx dz \left\{ (\bar{\tau}_{yx} v_x + \bar{\tau}_{yy} v_y + \bar{\tau}_{yz} v_z)_{|_{y+dy}} - (\bar{\tau}_{yx} v_x + \bar{\tau}_{yy} v_y + \bar{\tau}_{yz} v_z)_{|_y} \right\} + \\ & + dx dy \left\{ (\bar{\tau}_{zx} v_x + \bar{\tau}_{zy} v_y + \bar{\tau}_{zz} v_z)_{|_{z+dz}} - (\bar{\tau}_{zx} v_x + \bar{\tau}_{zy} v_y + \bar{\tau}_{zz} v_z)_{|_z} \right\} \end{aligned} \quad (1.78)$$

Тепер підставимо отримані вирази (1.73)–(1.78) у рівняння (1.72), попередньо скориставшись процедурою розкладання в ряд Тейлора до 1-го порядку малості всіх членів з повними диференціалами й розділимо ліву та праву частини отриманого рівняння на $dx dy dz$, у результаті отримаємо рівняння енергії

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\rho u + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{V}|^2 \right) = - \left[\frac{\partial}{\partial x} v_x \left(\rho u + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{V}|^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} v_y \left(\rho u + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{V}|^2 \right) + \right. \\ & + \left. \frac{\partial}{\partial z} v_z \left(\rho u + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{V}|^2 \right) \right] - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) + \rho (v_x g_x + v_y g_y + v_z g_z) - \\ & - \left(\frac{\partial}{\partial x} p v_x + \frac{\partial}{\partial y} p v_y + \frac{\partial}{\partial z} p v_z \right) - \left[\frac{\partial}{\partial x} (\bar{\tau}_{xx} v_x + \bar{\tau}_{xy} v_y + \bar{\tau}_{xz} v_z) + \right. \\ & + \left. \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\tau}_{yx} v_x + \bar{\tau}_{yy} v_y + \bar{\tau}_{yz} v_z) + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\tau}_{zx} v_x + \bar{\tau}_{zy} v_y + \bar{\tau}_{zz} v_z) \right]. \end{aligned} \quad (1.79)$$

Рівняння (1.79) можна переписати в більш компактній векторно-тензорній формі

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\rho u + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{V}|^2 \right) = - \left[\nabla \cdot \rho \mathbf{V} \left(\rho u + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{V}|^2 \right) \right] - (\nabla \cdot \mathbf{q}) + \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{g}) - (\nabla \cdot p \mathbf{V}) - (\nabla \cdot [\bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \mathbf{V}]). \quad (1.80)$$

Розкриємо фізичний зміст членів рівняння (1.80)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{швидкість} \\ \text{прирощення} \\ \text{енергії на} \\ \text{одиницю об'єму} \end{array} \right\} = - \left\{ \begin{array}{l} \text{швидкість підводу} \\ \text{енергії на} \\ \text{одиницю об'єму} \\ \text{шляхом конвекції} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{швидкість підводу} \\ \text{енергії на} \\ \text{одиницю об'єму} \\ \text{шляхом теплопровідності} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{швидкість} \\ \text{виробництва роботи} \\ \text{над рідиною} \\ \text{на одиницю об'єму} \\ \text{гравітаційними силами} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{швидкість} \\ \text{виробництва роботи} \\ \text{над рідиною} \\ \text{на одиницю об'єму} \\ \text{силами тиск} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{швидкість} \\ \text{виробництва роботи} \\ \text{над рідиною} \\ \text{на одиницю об'єму} \\ \text{силами в'язкості} \end{array} \right\}.$$

Виконаємо перетворення рівняння енергії за допомогою рівнянь нерозривності й руху. Цю операцію проведемо таким чином, як це було зроблено при переході від форми рівняння (1.47) до форми (1.51).

Виконаємо диференціювання лівої частини (1.80), перенесемо туди конвективний член і після перегруповування отримаємо

$$\rho \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} \left(u + \frac{1}{2} |\mathbf{V}|^2 \right) + \left[\mathbf{V} \cdot \nabla \left(u + \frac{1}{2} |\mathbf{V}|^2 \right) \right] \right\} + \left(u + \frac{1}{2} |\mathbf{V}|^2 \right) \left[\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + (\nabla \cdot \rho \mathbf{V}) \right] = -(\nabla \cdot \mathbf{q}) + \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{g}) - (\nabla \cdot p \mathbf{V}) - (\nabla \cdot [\bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \mathbf{V}]). \quad (1.81)$$

Перший член лівої частини рівняння (1.81) представляє собою субстанціональну похідну від $\left(u + \frac{1}{2} |\mathbf{V}|^2 \right)$, а другий дорівнює нулю на підставі рівняння нерозривності (1.30).

Перепишемо рівняння (1.81) з врахуванням відміченого

$$\rho \frac{D}{D\tau} \left(u + \frac{1}{2} |\mathbf{V}|^2 \right) = -(\nabla \cdot \mathbf{q}) + \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{g}) - (\nabla \cdot p \mathbf{V}) - (\nabla \cdot [\bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \mathbf{V}]). \quad (1.82)$$

Відмітимо, що отримані тут дві форми рівняння енергії (1.80) і (1.82) кореспондуються з двома формами рівняння нерозривності (1.30) і (1.32) та двома формами рівняння руху (1.50) і (1.52).

Рівняння (1.80) описує обмін енергією в рідині з точки зору нерухомого спостерігача, а (1.82) описує цей обмін, якби його спостерігав дослідник, який би рухався разом з потоком рідини.

Рівняння (1.82) є рівнянням, яке записано для суми потенціальної й кінетичної енергії потоку рідини $\left(u + \frac{1}{2}|\mathbf{V}|^2\right)$.

Рівняння переносу для кінетичної енергії потоку рідини було отримано раніше (1.68). Перепишемо його в такій формі

$$\rho \frac{D}{D\tau} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{V}|^2 \right) = p(\nabla \cdot \mathbf{V}) - (\nabla \cdot p\mathbf{V}) + \rho(\mathbf{V} \cdot \mathbf{g}) - (\nabla \cdot [\bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \mathbf{V}]) + (\bar{\boldsymbol{\tau}} : \nabla \mathbf{V}). \quad (1.83)$$

Віднімаючи рівняння (1.83) із (1.82), отримаємо рівняння для внутрішньої енергії u у вигляді

$$\rho \frac{Du}{D\tau} = -(\nabla \cdot \mathbf{q}) - p(\nabla \cdot \mathbf{V}) - (\bar{\boldsymbol{\tau}} : \nabla \mathbf{V}). \quad (1.84)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{швидкість} \\ \text{накопичення} \\ \text{внутрішньої енергії} \\ \text{на одиницю об'єму} \end{array} \right\} = - \left\{ \begin{array}{l} \text{швидкість підводу} \\ \text{внутрішньої енергії на} \\ \text{одиницю об'єму} \\ \text{шляхом теплопровідності} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{швидкість зростання} \\ \text{внутрішньої енергії} \\ \text{при рівноважному} \\ \text{стисканні на} \\ \text{одиницю об'єму} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{швидкість зростання} \\ \text{внутрішньої енергії} \\ \text{за рахунок нерівноважної} \\ \text{дисипації на} \\ \text{одиницю об'єму} \end{array} \right\}.$$

Рівняння (1.84) називають рівнянням теплової енергії або просто рівнянням енергії.

Представимо член $\rho \frac{Du}{D\tau}$ у формі $\rho c_v \frac{DT}{D\tau}$,

де c_v – ізохорна масова теплоємність, Дж/(кг·К);

а член $(\nabla \cdot \mathbf{q})$ – у формі (див. п. 1.1)

$$\frac{\partial}{\partial x} q_x + \frac{\partial}{\partial y} q_y + \frac{\partial}{\partial z} q_z$$

де $q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$, $q_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}$, $q_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}$; член $(\bar{\tau} : \nabla \mathbf{V})$ замінити на (1.69).

З врахуванням цього рівняння (1.84) можна переписати в такій формі

$$\rho c_v \frac{DT}{D\tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) - p(\nabla \cdot \mathbf{V}) + \mu \Phi_v. \quad (1.85)$$

Велике значення мають окремі випадки рівняння (1.85). Наприклад, при $\lambda = \text{const}$ і $\rho = \text{const}$ ($\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$) рівняння (1.85) приймає вид

$$\rho c_v \frac{DT}{D\tau} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \mu \Phi_v; \quad (1.86)$$

для ідеального стисливого газу

$$\rho c_v \frac{DT}{D\tau} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) - p(\nabla \cdot \mathbf{V}); \quad (1.87)$$

для твердого тіла $\mathbf{V} = 0$, тому

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \text{ або } \frac{\partial T}{\partial \tau} = a \nabla^2 T, \quad (1.88)$$

де $a = \frac{\lambda}{c_v \rho}$ – температуропровідність, м²/с; $c_v = c_p = c$ – масова теплоємність

твердого тіла, Дж/(кг·К).

Рівняння (1.88) називають рівнянням теплопровідності. У випадку, коли температура в часі не змінюється, рівняння (1.88) стає стаціонарним

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \text{ або } \nabla^2 T, \text{ або } \Delta T = 0. \quad (1.89)$$

Рівняння (1.89) називають рівнянням Лапласа.

1.2.5. Крайові умови

Основні диференціальні рівняння нерозривності (1.29), руху (1.47)–(1.49) та енергії (1.85) виражають собою фундаментальні закони збереження маси, імпульсу (кількості руху) та енергії. Крім того, ці рівняння містять під-

тверджені експериментом гіпотези – закон в'язкого тертя Ньютона й закон Фур'є.

Загальні розв'язки перерахованих рівнянь у частинних похідних не є фізичними (див. п. 1.1). Для розв'язання конкретних гідродинамічних і теплових задач (або задач конвективного теплообміну) слід сформулювати крайову задачу для вказаних рівнянь, тобто задати крайові умови або умови однозначності. Завдання крайових умов полягає у формулюванні, по-перше, геометричних і фізичних умов, тобто завдання геометрії розрахункової області та фізичних властивостей рідини, по-друге, початкових умов, тобто завдання значень шуканих функцій у вказаних рівняннях у початковий момент часу, який зазвичай беруть за $\tau = 0$, і, по-третє, граничних умов, що задаються на поверхнях, які обмежують рідину, що рухається. Для швидкості в'язкої рідини такими умовами можуть бути, умови «прилипання» або рівність нулю швидкості на нерухомих поверхнях твердих тіл, з якими стикається рідина, що рухається, тобто $\mathbf{V} = 0$. У випадку рухомого твердого тіла швидкість рідини на цій поверхні, очевидно, має дорівнювати швидкості поверхні. Ці умови «прилипання» в'язкої рідини є наслідком того, що між поверхнею твердого тіла і всякою реальною рідиною завжди існують сили молекулярного зчеплення, у результаті чого шар рідини, який безпосередньо прилягає до твердої стінки, повністю затримується, наче прилипає до стінки. Відхилення від цих умов спостерігаються в розріджених газах, де приходиться враховувати проковзування рідини вздовж стінок.

Симетричні умови для потоку рідини можна записати таким чином

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{V} = 0.$$

Що стосується рівняння енергії (в окремому випадку, теплопровідності), то для шуканої функції – температури можуть бути задано чотири основних граничних умови (див. п. 1.1).

1.3. Радіаційний теплообмін. Основні положення

1.3.1. Загальні відомості

Потік енергії випромінювання, що відповідає інтервалу зміни довжини хвилі від λ до $\lambda + d\lambda$, називається потоком монохроматичного випромінювання Q_λ . Інтегральний променистий потік (Вт) $Q = \int_0^{\lambda=\infty} Q_\lambda d\lambda$ – називається повним променистим потоком.

Інтегральний променистий потік, що випромінюється з одиниці поверхні тіла по всіх напрямках напівсферичного простору, називається густиною потоку інтегрального випромінювання (Вт/м²)

$$E = \frac{dQ}{dF}, \quad (1.90)$$

де dF – площа елементарної площадки, м^2 .

Звідки

$$Q = \int_F E dF. \quad (1.91)$$

Густина монохроматичного випромінювання називається спектральною інтенсивністю випромінювання

$$J_\lambda = \frac{dE}{d\lambda}. \quad (1.92)$$

Тоді $E = \int_0^{\lambda=\infty} J_\lambda d\lambda$ або через частоту (ν , $\text{Гц}=1/\text{с}$) $E = \int_0^{\nu=\infty} J_\nu d\nu$.

У загальному випадку падаюче випромінювання поглинається тілом, відбивається та проходить крізь нього

$$E_{\text{пад}} = E_{\text{пог}} + E_{\text{відб}} + E_{\text{пр}}, \quad (1.93)$$

де $E_{\text{пад}}$ – падаюче, $E_{\text{пог}}$ – поглинуте; $E_{\text{відб}}$ – відбите і $E_{\text{пр}}$ – пропущене випромінювання.

Введемо позначення

$$\frac{E_{\text{пог}}}{E_{\text{пад}}} = \varepsilon, \quad \frac{E_{\text{відб}}}{E_{\text{пад}}} = R, \quad \frac{E_{\text{пр}}}{E_{\text{пад}}} = D, \quad (1.94)$$

де ε – ступінь чорноти тіла; R – коефіцієнт відбиття тіла; D – коефіцієнт пропускання тіла.

Тоді

$$\varepsilon + R + D = 1. \quad (1.95)$$

Якщо тіло повністю поглинає енергію, тоді $\varepsilon = 1$, $R = D = 0$. Таке тіло називається абсолютно чорним.

При $R = 1$, $\varepsilon = D = 0$ можуть бути два випадки:

1) дзеркальне тіло – відбиття дзеркальне, яке відповідає законам геометричної оптики;

2) абсолютно біле тіло – дифузне відбиття-розсіювання по усіх напрямках.

Якщо $D = 1$, $\varepsilon = R = 0$, то таке тіло називається абсолютно прозорим. У

природі не існує абсолютно чорних, білих та прозорих тіл.

Кожне тіло характеризується власним випромінюванням $E_{\text{вл}}$, яке залежить від випромінювальних властивостей тіла та його температури.

Густину відбитого випромінювання тіла можна записати так

$$E_{\text{відб}} = RE_{\text{пад}}. \quad (1.96)$$

Сума $E_{\text{вл}}$ і $E_{\text{відб}}$ називається ефективним випромінюванням тіла. Густина ефективного випромінювання визначається як

$$E_{\text{еф}} = E_{\text{вл}} + E_{\text{відб}} = E_{\text{вл}} + RE_{\text{пад}}. \quad (1.97)$$

Для розрахунку променистого (радіаційного) теплообміну необхідно визначати густину потоку результуючого випромінювання при $D=0$:

$$E_{\text{рез}} = E_{\text{вл}} - E_{\text{пог}} = E_{\text{вл}} - \varepsilon E_{\text{пад}} \quad (1.98)$$

$$\text{або } E_{\text{рез}} = E_{\text{еф}} - E_{\text{пад}}. \quad (1.99)$$

Виведення

$$\begin{aligned} E_{\text{вл}} &= E_{\text{еф}} - RE_{\text{пад}}, \\ E_{\text{рез}} &= E_{\text{вл}} - \varepsilon E_{\text{пад}} = E_{\text{еф}} - RE_{\text{пад}} - \varepsilon E_{\text{пад}} = \\ &= E_{\text{еф}} - (R + \varepsilon)E_{\text{пад}} = E_{\text{еф}} - E_{\text{пад}}. \end{aligned} \quad (1.100)$$

1.3.2. Об'ємне випромінювання

Для середовища, яке заповнює деякий об'єм системи й може бути випромінювальним, поглинальним і розсіювальним, характерним є об'ємна густина потоків випромінювання. Аналогічно викладеному, і в цьому випадку можна говорити про об'ємну густину власного, поглиненого, розсіяного та інших видах випромінювання.

Інтегральною й монохроматичною об'ємною густиною потоків власного випромінювання називаються променисті потоки, які випускаються одиницею об'єму середовища в одиницю часу по всіх різноманітних напрямках у межах просторового кута $\omega = 4\pi$

$$\eta = \frac{dQ}{dV}; \quad \eta_{\lambda} = \frac{dQ_{\lambda}}{dV}, \quad (1.101)$$

де η і η_{λ} – вимірюються у Вт/м³.

Променисті потоки, що віднесені до всього об'єму, виражаються залежностями:

$$Q = \int_V \eta dV; \quad Q_\lambda = \int_V \eta_\lambda dV. \quad (1.102)$$

Потоки монохроматичного та інтегрального випромінювання пов'язані співвідношенням

$$Q = \int_{\lambda=0}^{\infty} Q_\lambda d\lambda = \int_0^{\infty} \int_V \eta_\lambda dV d\lambda - \text{запис через довжину хвилі } (\lambda, \text{ м}),$$

а через частоту (ν , 1/с)

$$Q = \int_{\nu=0}^{\infty} Q_\nu d\nu = \int_0^{\infty} \int_V \eta_\nu dV d\nu. \quad (1.103)$$

Густина поглиненого об'ємного випромінювання

$$\eta_{\text{погл}} = k\eta_{\text{пад}} \quad (1.104)$$

і густина розсіяного об'ємного випромінювання

$$\eta_{\text{розс}} = \beta\eta_{\text{пад}} \quad (1.105)$$

представляють собою деякі частки густини об'ємного випромінювання $\eta_{\text{пад}}$, що падає. Величини k і β (1/м) називаються відповідно, коефіцієнтами поглинання й розсіювання. Сума цих коефіцієнтів називається коефіцієнтом ослаблення середовища (κ).

Аналогічно (1.97) густиною ефективного об'ємного випромінювання називається сумарна величина густини потоків власного й розсіяного випромінювання

$$\eta_{\text{еф}} = \eta_{\text{вл}} + \eta_{\text{розс}} = \eta_{\text{вл}} + \beta\eta_{\text{пад}}. \quad (1.106)$$

Отже, у випадку об'ємного випромінювання роль відбитого випромінювання відіграє розсіяне випромінювання, а роль поглинальної й відбивальної здатності – коефіцієнти поглинання й розсіювання.

Аналогічно до (1.98)–(1.100) густина потоку результуючого об'ємного випромінювання виражається залежністю

$$\eta_{\text{рез}} = \eta_{\text{вл}} - \eta_{\text{погл}} = \eta_{\text{вл}} - k\eta_{\text{пад}}. \quad (1.107)$$

Останні дві залежності можуть бути використані для отримання рівнянь, що зв'язують густину потоків результуючого та ефективного об'ємного випромінювання, аналогічно (1.98)–(1.100)

$$\eta_{\text{еф}} = \eta_{\text{рез}} \left(1 - \frac{1}{k} \right) + \frac{\eta_{\text{вл}}}{k}. \quad (1.108)$$

Розглянуті види поверхневої та об'ємної густини потоків випромінювання є основними характеристиками променистого теплообміну на граничних поверхнях і в об'ємі середовища, яке заповнює випромінювальну систему.

Складові густини потоку результуючого випромінювання в напрямку осей координат Ox, Oy, Oz є компоненти вектора випромінювання

$$\mathbf{q}_p = \mathbf{i}q_{\text{рез},x} + \mathbf{j}q_{\text{рез},y} + \mathbf{k}q_{\text{рез},z} = \int_{(4\pi)} \vec{l} d\nu. \quad (1.109)$$

Отже, вектор випромінювання визначається векторним інтегралом від інтенсивності випромінювання по сферичному тілесному куту.

1.3.3. Закони теплового випромінювання. Закон Планка

Закони теплового випромінювання отримані стосовно до ідеального абсолютно чорного тіла та термодинамічної рівноваги.

Рівноважне (чорне) випромінювання є таким, за якого всі тіла, що входять у дану випромінювальну систему, мають однакову температуру. Теплове випромінювання має динамічний характер: за однакової температури кожне з тіл як випускає, так і поглинає променисту енергію, але в однаковій кількості ($Q_{\text{рез}} = 0$).

Випускання енергії за довжиною хвилі відбувається нерівномірно й залежить від температури. Залежність спектральної густини потоку випромінювання від довжини хвилі й температури встановлюється законом Планка (1900 р., запис через довжину хвилі випромінювання)

$$E_{0\lambda} = \frac{2\pi c_1}{\lambda^5} \left(e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1 \right), \quad (1.110)$$

де λ – довжина хвилі, м; $c_1 = 5,944 \cdot 10^{-17}$ – перша константа випромінювання, Вт·м²; $c_2 = 1,4388 \cdot 10^{-2}$ – друга константа випромінювання, м·К; T – температура тіла, К; $E_{0\lambda}$ – вимірюється у Вт/м³.

Також закон Планка можна записати через частоту випромінювання (ν , 1/с)

$$I_{b\nu} = \frac{2h\nu^3}{c^2 [\exp(h\nu/kT) - 1]}, \text{ Вт}\cdot\text{с}/\text{м}^2 \text{ або Дж}/\text{м}^2$$

де $h = 6,6262 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – стала Планка; $k = 1,3806 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – стала Больц-

мана; $c = 2,9979 \times 10^8$ м/с – швидкість світла у вакуумі; ν – частота випромінювання, 1/с; T – температура, К.

Графічне представлення закону Планка показано на рис. 1.4.

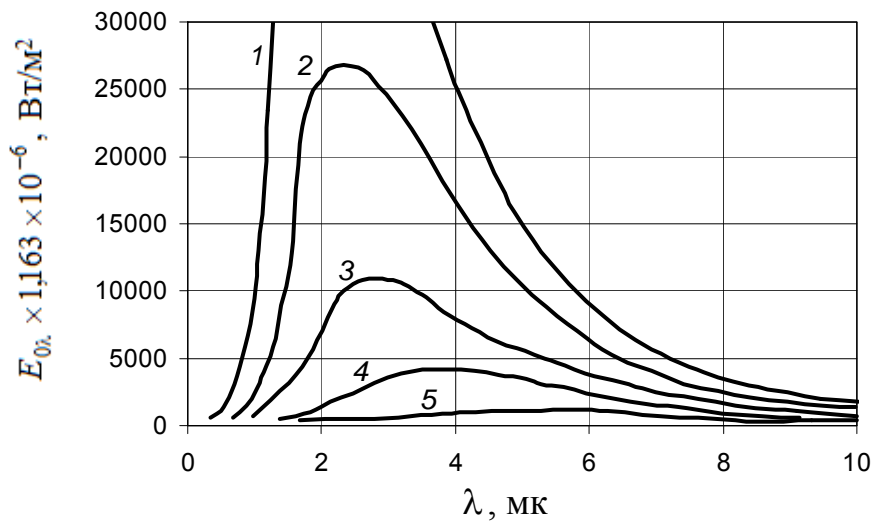


Рис. 1.4. Графічне представлення закону Планка: 1 – $T = 1400$ К; 2 – $T = 1200$ К; 3 – $T = 1000$ К; 4 – $T = 800$ К; 5 – $T = 600$ К

1.3.4. Закон Релея–Джинса

Закон Планка має два граничних випадки. До одного з них відноситься випадок, коли добуток λT – великий порівняно зі сталою c_2 . При цьому можна обмежитися двома складовими розкладання експоненціальної функції (1.110) у ряд за степенями $c_2/(\lambda T)$

$$e^{\frac{c_2}{\lambda T}} = 1 + \frac{1}{1!} \left(\frac{c_2}{\lambda T} \right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{c_2}{\lambda T} \right)^2 + \dots$$

Тоді (1.110) переходить у співвідношення, яке виражає закон Релея–Джинса

$$E_{0\lambda} = \frac{c_1 T}{c_2 \lambda^4}. \quad (1.111)$$

1.3.5. Закон зміщення Віна

Другий граничний випадок відповідає малому значенню добутку λT порівняно зі сталою c_2 . Тоді в залежності (1.110) можна знехтувати одиницею й вона переходить у залежність, яка виражається законом Віна (1893 р.)

$$E_{0\lambda} = \frac{c_1}{\lambda^5} e^{-\frac{c_2}{\lambda T}}. \quad (1.112)$$

Положення максимумів випромінювання (див. рис. 1.4) можна отримати із екстремального значення функції $E_{0\lambda}$. Для цього знаходиться похідна функції по довжині хвилі. Прирівнюючи похідну нулю, отримуємо трансцендентне рівняння

$$e^{-\frac{c_2}{\lambda_{\max} T}} + \frac{c_2}{5\lambda_{\max} T} - 1 = 0.$$

Розв'язок цього рівняння приводить до співвідношення $\frac{c_2}{\lambda_{\max} T} = 4,965$, звідки

$$\lambda_{\max} T = 2,8978 \cdot 10^{-3}, \quad (1.113)$$

де λ_{\max} – довжина хвилі, яка відповідає максимуму густини випромінювання; одиниця вимірювання добутку $\lambda_{\max} T$ – м·К.

Залежність (1.113) виражає закон зміщення Віна. Згідно цьому закону максимальна величина спектральної інтенсивності потоку випромінювання з підвищенням температури зсувається у сторону більш коротких довжин хвиль.

Величина максимальної густини потоку випромінювання чорного тіла може бути знайдена із закону Планка (1.110), якщо покласти $\lambda = \lambda_{\max}$ і використувати залежність (1.113)

$$(E_{0\lambda})_{\max} = c_3 T^5, \quad (1.114)$$

де стала $c_3 = 1,307 \text{ Вт}/(\text{м}^3 \cdot \text{К}^5)$.

Із (1.114) витікає, що величина максимальної густини випромінювання пропорційна абсолютній температурі тіла у п'ятій степені.

1.3.6. Закон Планка в безрозмірному виді

Закон зміщення Віна (1.114) дозволяє привести закон Планка (1.110) до безрозмірного виду

$$\frac{E_{0\lambda}}{(E_{0\lambda})_{\max}} = \frac{c_1}{c_3 (\lambda T)^5} \left(e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1 \right)^{-1} = \varphi(\lambda T). \quad (1.115)$$

Якщо в (1.115) замість T ввести її значення із (1.113), то отримаємо

$$\frac{E_{0\lambda}}{(E_{0\lambda})_{\max}} = f\left(\frac{\lambda}{\lambda_{\max}}\right). \quad (1.116)$$

Тоді закон Планка графічно виразиться не рядом ізотерм, як показано на рис. 1.4, а однією кривою, справедливою для будь-якої довжини хвилі й температури тіла (рис. 1.5).

1.3.7. Закон Стефана–Больцмана

Закон Стефана-Больцмана встановлює залежність густини потоку інтегрального напівсферичного випромінювання від температури. Ця залежність задовго до появи квантової теорії Планка вперше експериментально (шляхом вимірювань власного випромінювання моделі чорного тіла) була встановлена Стефаном (1879 р.). Пізніше (1884 р.) вона теоретично (виходячи із законів термодинаміки) була отримана Больцманом. Тому закон отримав об'єднану назву закону Стефана-Больцмана. Закон Стефана-Больцмана також може бути отримано і в разі застосування закону Планка. Закон Стефана-Больцмана для поверхневої густини потоку інтегрального випромінювання E_0 , Вт/м², можна виразити таким чином

$$E_0 = \int_{\lambda=0}^{\infty} E_{\lambda} d\lambda = \sigma T^4, \quad (1.117)$$

де $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м²·К⁴) – стала Стефана-Больцмана.

Для практичних розрахунків остання залежність переписується у виді

$$E_0 = c_0 \left(\frac{T}{100} \right)^4, \quad (1.118)$$

де $c_0 = 5,67$ Вт/(м²·К⁴) – коефіцієнт випромінювання абсолютно чорного тіла.

Закон Стефана-Больцмана може бути застосований до «сірих» тіл. У цьому випадку використовується положення про те, що в «сірих» тілах, також як і в чорних, власне випромінювання пропорційне абсолютній температурі в четвертому степені, але енергія випромінювання менша за енергію випромінювання чорного тіла за тієї самої температури (рис. 1.6).

Тоді для «сірих» тіл закон приймає вигляд

$$E = \varepsilon E_0 = \varepsilon c_0 \left(\frac{T}{100} \right)^4 = c \left(\frac{T}{100} \right)^4. \quad (1.119)$$

де $\varepsilon = E / E_0 = c / c_0$ – інтегральна ступінь чорноти «сірого» тіла; c – коефіцієнт випромінювання «сірого» тіла, Вт/(м²·К⁴).

Таким чином, інтегральним ступенем чорноти називається відношення поверхневої густини потоку власного інтегрального випромінювання до його величини для абсолютно чорного тіла за тієї самої температури.

Застосування закону Стефана-Больцмана для «сірого» тіла є строгим у тій мірі, у якій строгою постійною, тобто незалежною від температури, лишається ступінь чорноти.

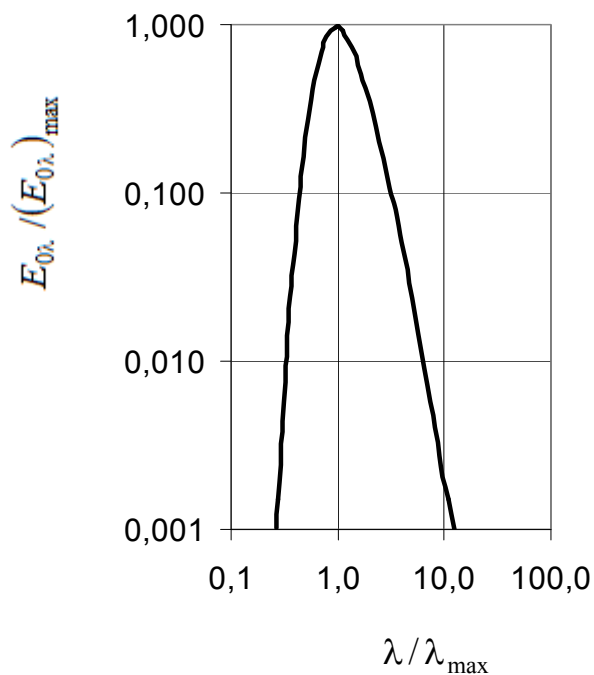


Рис. 1.5. Графічне представлення закону Планка в безрозмірній формі

(максимум відповідає значенням $\frac{E_{0\lambda}}{(E_{0\lambda})_{max}} = 1$ і $\frac{\lambda}{\lambda_{max}} = 1$)

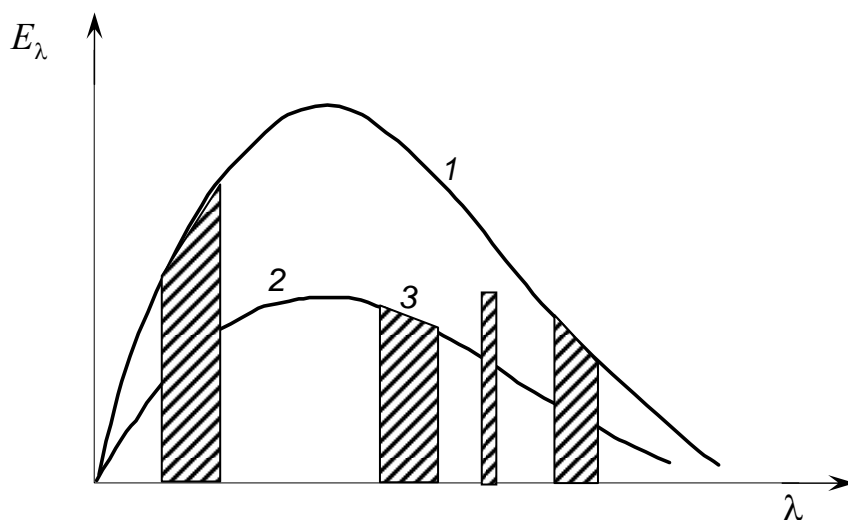


Рис. 1.6. Густина потоку випромінювання залежно від довжини хвилі:
1 – чорне тіло; 2 – сіре; 3 – селективне

Однак у дійсності ступінь чорноти (відносний коефіцієнт випромінювання) «сірого» тіла залежить від природи тіла, температури, стану поверхні і в більшості випадків визначається експериментально. Коефіцієнт випромінювання в цьому випадку характеризує інтенсивність власного випромінювання тіла. Кількісно коефіцієнт випромінювання дорівнює потоку власного випромінювання, який віднесено до одиниці поверхні, до одиниці часу і до одиниці перепаду температури у четвертих степенях між цим тілом та оточуючими тілами, які знаходяться за температури абсолютного нуля.

1.3.8. Закон Кірхгофа

Закон Кірхгофа (1982 р.) встановлює кількісний зв'язок між енергією випромінювання й поглинання поверхнями «сірих» і абсолютно чорних тіл. Цей закон можна отримати із балансу променистої енергії для випромінювальної системи, яка складається із відносно великого замкненого об'єму з теплоізованими стінками і розташованих у ньому тіл. В умовах термодинамічної рівноваги, для кожного із цих тіл, енергія випромінювання дорівнює поглиненій енергії

$$E_1 = E_{\text{погл1}} = A_1 E_{\text{пад1}} = A_1 E_0; \quad E_2 = E_{\text{погл2}} = A_2 E_{\text{пад2}} = A_2 E_0; \quad \dots$$

звідси отримуємо

$$\frac{E_1}{A_1} = \frac{E_2}{A_2} = \dots = E_0 = f(T). \quad (1.120)$$

Залежність (1.120) виражає закон Кірхгофа. Згідно цьому закону відношення енергії випромінювання до енергії поглинання не залежить від природи тіл і дорівнює енергії випромінювання абсолютно чорного тіла за тієї самої температури. Використовуючи (1.119) і (1.120), отримуємо

$$E = \varepsilon E_0 = A E_0,$$

наслідком чого є чисельна рівність ступеня чорноти та поглинальної спроможності тіла

$$\varepsilon = A. \quad (1.121)$$

Залежності (1.118), (1.119) справедливі і стосовно спектральних величин. Тоді спектральна яскравість чорноти виражається залежністю

$$\varepsilon_\lambda = \frac{E_\lambda}{E_{0\lambda}} = f(\lambda T).$$

Ступінь чорноти, що відповідає направленому випромінюванню, тобто зв'язана з певним напрямком випромінювання, представляється залежностями:

$$\varepsilon_{\psi} = \frac{E_{\psi}}{E_{0\psi}} = f(\lambda T) \text{ і } \varepsilon_{\psi\lambda} = \frac{E_{\psi\lambda}}{E_{0\psi\lambda}} = f(\lambda T). \quad (1.122)$$

Для «не сірих» тіл закон Кірхгофа виконується тільки при співставленні спектральних величин.

У термодинамічно рівноважній системі з проміжним поглинальним середовищем для кожного його елементарного об'єму має місце чисельна рівність об'ємної густини потоків власного й поглиненого випромінювання

$$\eta = \eta_{\text{погл}} = \kappa \eta_{\text{пад}} = k \int_{(4\pi)} I_0 d\omega = 4kE_0 = 4\pi k I_0. \quad (1.123)$$

Залежність (1.123) виражає Закон Кірхгофа для середовища.

1.3.9. Закон Ламберта

Закон Стефана-Больцмана визначає сумарне випромінювання поверхні тіла по всіх напрямках півпростору.

Енергія випромінювання, яка випускається тілом по окремих напрямках, встановлюється законом Ламберта (1970 р.). Згідно закону Ламберта потік випромінювання абсолютно чорного тіла в даному напрямку пропорційний потоку випромінювання в напрямку нормалі до поверхні й косинусу кута між ними.

Для кутової густини потоку випромінювання закон Ламберта представляється залежністю

$$I_{\psi} = I_n \cos \psi, \quad (1.124)$$

де I_{ψ} і I_n – кутова густина потоків інтегрального випромінювання відповідно в напрямках, які визначаються кутом ψ (рис. 1.7) і в напрямку нормалі до поверхні.

Із закону Ламберта витікає важливий наслідок для яскравості випромінювання абсолютно чорного тіла, яка визначається співвідношенням

$$I = \frac{d^2 Q_{\psi}}{dF_n d\omega} = \frac{d^2 Q_{\psi}}{dF \cos \psi d\omega} = \frac{I_{\psi}}{\cos \psi}. \quad (1.125)$$

Якщо в нього підставити вираз (1.124), то отримаємо

$$I = \frac{I_{\psi}}{\cos \psi} = I_n = \text{idem}. \quad (1.126)$$

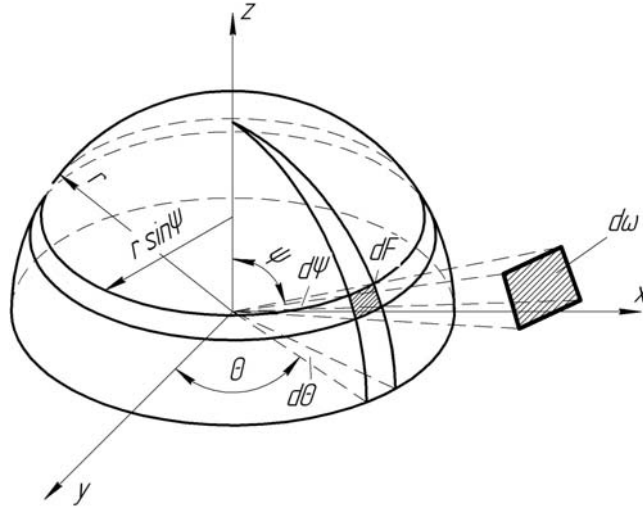


Рис. 1.7. До визначення просторового тілесного кута

Отже, якщо випромінювання відповідає закону Ламберта, то його яскравість не залежить від напрямку, тобто є величиною сталою. Тоді залежність (1.124) приймає вид

$$I_{\psi} = I \cos \psi . \quad (1.127)$$

Встановимо зв'язок між яскравістю й густиною потоку напівсферичного випромінювання. Елементарна густина потоку в даному напрямку виражається залежністю

$$dE_{\psi} = Id\omega \cos \psi .$$

Тілесний кут $d\omega$ представляє собою кут, під яким із будь-якої точки елементарної площадки одного тіла видно елементарну площадку іншого тіла

$$d\omega = dF / r^2 , \quad (1.128)$$

де dF – елементарна площадка, яка вирізана тілесним кутом на поверхні сфери радіусу r (див. рис. 1.7). Ця площадка може бути представлена добутком двох елементарних дуг: $rd\psi$ і $r \sin \psi d\theta$. Тут кут ψ – кут, додатковий до кута широти; θ – кут довготи, відповідно,

$$d\omega = d\psi \sin \psi d\theta . \quad (1.129)$$

Підставляючи в $d^2Q_{\psi} = Id\omega \cos \psi dF$ значення $d\omega$ із (1.129), враховуючи (1.126) та інтегруючи, отримаємо залежність для густини потоку напівсферичного випромінювання

$$E = I \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} \sin \psi \cos \psi d\psi = I\pi , \quad (1.130)$$

звідки

$$I = E / \pi, \quad (1.131)$$

де E – густина інтегрального напівсферичного випромінювання абсолютно чорного тіла, яка визначається із закону Стефана-Больцмана; I – яскравість випромінювання.

Співвідношення (1.131) показує, що яскравість у напрямку нормалі до поверхні випромінювання в π раз менше густини потоку інтегрального випромінювання. Залежність (1.131) справедлива і для спектрального випромінювання. Підставляючи знайдене значення яскравості випромінювання в $d^2Q_\psi = I d\omega \cos \psi dF$ і $d^2Q_{\lambda\psi} = I_\lambda d\omega \cos \psi dF$ отримаємо

$$\begin{cases} dE_\psi = \frac{E}{\pi} d\omega \cos \psi; \\ dE_{\lambda\psi} = \frac{E_\lambda}{\pi} d\omega \cos \psi. \end{cases} \quad (1.132)$$

Ці залежності виражають закон косинусів або закон напрямків Ламберта.

Якщо для даного тіла відома залежність яскравості інтегрального або спектрального випромінювання від напрямку, то в загальному випадку поверхнева густина власного випромінювання якого-небудь тіла визначається із співвідношень:

$$E = 2\pi \int_0^{\pi/2} I(\psi) \sin \psi \cos \psi d\psi; \quad (1.133)$$

$$E = 2\pi \int_0^\infty d\lambda \int_0^{\pi/2} I_\lambda(\psi) \sin \psi \cos \psi d\psi. \quad (1.134)$$

1.3.10. Чорні температури

Як характеристика випромінювання нечорного тіла поряд зі ступенем чорноти використовується так звана чорна температура.

Під чорною температурою розуміється така умовна температура, яку може мати дане тіло, якщо б випромінювання, яке їм випускається, було чорним. Кожне тіло може характеризуватися цілим рядом чорних температур залежно від виду випромінювання, яке їм випускається.

При співставленні густини потоків інтегрального випромінювання тіла з температурою T та абсолютно чорного тіла чорна температура називається радіаційною $T_{\text{рад}}$. За визначенням вона знаходиться із співвідношення

$$E(T) = E_0(T_{\text{рад}}).$$

Використовуючи закон Стефана-Больцмана, можна встановити зв'язок між дійсною й радіаційною температурами

$$T = T_0 \sqrt[4]{\frac{1}{\varepsilon}}.$$

Якщо чорна температура визначається із порівняння спектральних потоків випромінювання, то вона називається кольоровою температурою (T_k). При цьому зазвичай розглядається випромінювання тільки для будь-яких двох довжин хвиль (двох кольорів)

$$\frac{E_{\lambda_1}(T)}{E_{\lambda_2}(T)} = \frac{E_{0\lambda_1}(T_c)}{E_{0\lambda_2}(T_c)}.$$

Використовуючи (1.112), (1.122) і (1.131) отримуємо зв'язок між T і (T_k)

$$\frac{1}{T_k} - \frac{1}{T} = \frac{\ln(\varepsilon_{\lambda_1} / \varepsilon_{\lambda_2})}{c_2 \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right)}.$$

При співставленні яскравості чорна температура носить назву яркісної температури (T_y)

$$I_\lambda(T) = I_{0\lambda}(T_y).$$

Представляючи, що $I_\lambda(T) = \varepsilon_\lambda I_{0\lambda}(T_y)$ і використовуючи (1.131), отримуємо залежність, яка зв'язує дійсну і яркісну температури

$$\frac{1}{T} - \frac{1}{T_y} = \frac{\lambda}{c_2} \ln \varepsilon_\lambda.$$

Наведені співвідношення, що зв'язують T з $T_{\text{рад}}$, T_k і T_y , лежать у основі оптичних методів вимірювання високих температур.

1.4. Моделі турбулентних потоків рідини. Наближення Бусінеска

Описання процесів, які пов'язані з турбулентними потоками рідини, з використанням обчислювальної гідродинаміки (Computational Fluid Dynamics, CFD) може бути виконано за допомогою трьох моделей (рівнів) організації обчислень [3]:

– перший рівень – це рівень осереднених за Рейнольдсом рівнянь Нав'є-Стокса (Reynolds averaged Navier-Stokes equations, RANS). Історично це був перший можливий підхід, оскільки обчислення миттєвого поля течії в турбулентному потоці було неможливо. Таким чином, RANS був розроблений для розрахунку середнього значення всіх величин. Рівняння балансу усереднених по Рейнольдсу або Фавру [3] (тобто масо-зважених) величин отримують шляхом усереднення миттєвих рівнянь балансу. Розв'язання цих рівнянь забезпечує усереднену величину, що відповідає середньому значенню в часі для стаціонарних середніх потоків або середніх за різними реалізаціями (або циклами) періодичних потоків. Поле температур, отримане за допомогою RANS, у даній точці є константою, що відповідає середній температурі в цій точці (рис. 1.8);

– другий рівень відповідає моделюванню великих вихорів (Large Eddy Simulation, LES). Великі масштаби турбулентності визначаються явно, у той час як ефект більш дрібних моделюється за допомогою підсіткових правил замикання (моделей турбулентності). Рівняння балансу для моделювання великих вихорів отримують шляхом фільтрації миттєвих рівнянь балансу. LES визначає миттєве положення «великого» масштабу вирішеного потоку, але підсіткова модель все ще необхідна для того щоб прийняти до уваги ефекти малих турбулентних масштабів. LES охоплює низькочастотні коливання температури (див. рис. 1.8);

– третім рівнем моделювання є пряме числове моделювання (Direct Numerical Simulation, DNS), де повні миттєві рівняння Нав'є-Стокса [3, 8] вирішуються без будь-якої моделі турбулентності: весь масштаб турбулентності визначається явно. DNS передбачає коливання температури протягом всього часу (див. рис. 1.8) аналогічно тому, як датчик з високою точністю буде вимірювати її в експерименті. DNS, що був розвинутий у останні двадцять років завдяки розвитку високопродуктивних суперкомп'ютерів, змінив аналіз турбулентної течії, але як і раніше обмежується простими академічними задачами (як правило, потоки рідини в малій кубічній камері).

З точки зору обчислювальних потреб DNS є самим вимогливим методом, що обмежується досить малими значеннями числа Рейнольдса і спрощеною геометрією [3–6]. LES працює з грубими сітками (при цьому тільки великі масштаби повинні бути вирішені) і може бути використана для більших значень чисел Рейнольдса, але потребує підсіткового масштабу моделей турбулентності. Якість обчислень і точність результатів, безпосередньо пов'язані з цими фізичними підсітковими моделями. У сучасній інженерній практиці широко використовуються RANS моделі, оскільки вони з точки зору ресурсів є менш витратними, але їх дії обмежуються замиканням моделей, що описують турбулентність [6].

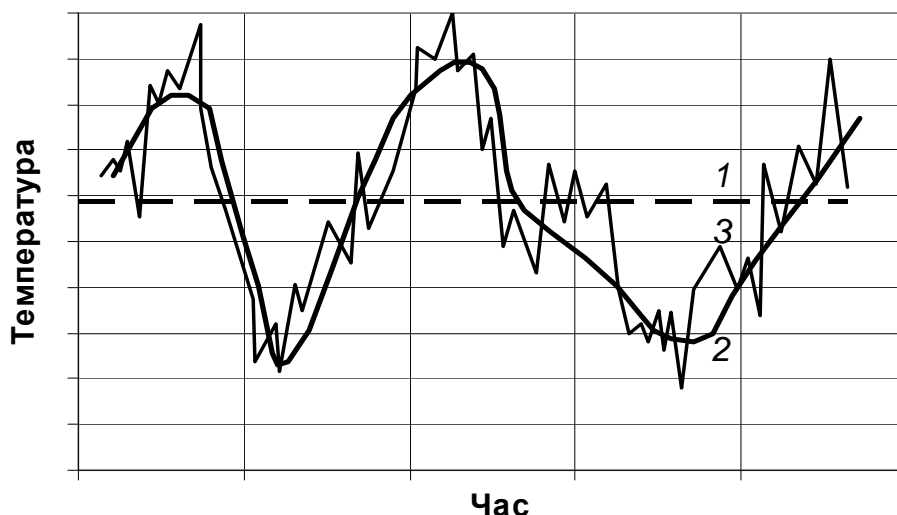


Рис. 1.8. Залежність температури турбулентного потоку від часу при використанні різних методів розрахунку: 1 – RANS; 2 – LES ; 3 – DNS

Задачі, що розв'язуються за допомогою DNS і RANS потребують суттєво різних розмірів сітки (10–50 мкм для DNS і 1–5 мм для RANS) [3]. Тобто різниця між розрахунковими сітками RANS і DNS становить 100. Останній чинник є визначальним при виборі моделей CFD. За даними [3] для моделювання промислових агрегатів найбільшого застосування на даний час дістали моделі RANS.

Рівняння балансу для середніх величин під час моделювання RANS отримують шляхом усереднення миттєвих рівнянь балансу. Початковими умовами для усереднення миттєвих рівнянь балансу нерозривності (1.135), збереження кількості руху (1.136) та енергії (1.137) є [3]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0; \quad (1.135)$$

$$\frac{\partial \rho u_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i u_j) + \frac{\partial p}{\partial x_j} = \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_i}; \quad (1.136)$$

$$\frac{\partial \rho h_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i h_s) = \frac{D_p}{D_t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \bar{\tau}_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + q_v, \quad (1.137)$$

де ρ – густина; t – час; u_i – компонента швидкості; p – тиск; $\bar{\tau}_{ij}$ – компоненти тензора напружень; h_s – ентальпія; D_p / D_t – субстанціональна похідна від тиску; D_t – коефіцієнт турбулентної дифузії; λ – теплопровідність; T – температура; q_v – об'ємне джерело, яке пов'язано з тепловим випромінюванням, фазовими переходами та хімічними реакціями.

У постійних потоках густини, усереднення за Рейнольдсом полягає в розділенні будь-якої величини f на середню \bar{f} та складову коливання f' ($f = \bar{f} + f'$). Використовуючи цю процедуру рівняння збереження маси (1.135) перетвориться до виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{\rho u_i}) &= \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} \bar{u}_i + \overline{\rho' u'_i}) = 0 \\ \text{або } \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} \bar{u}_i) &= - \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{\rho' u'_i}), \end{aligned} \quad (1.138)$$

де $\overline{\rho' u'_i}$ – невизначена величина, яка відповідає кореляції між густиною і швидкістю коливань і потребує використання певної моделі.

Ця величина також є масовим джерелом для середнього поля течії $(\bar{\rho}, \bar{u}_i)$, яка незручна у використанні для CFD кодів (програмного забезпечення). Усереднення за Рейнольдсом для змінної густини потоків вводить багато інших невідомих кореляцій між будь-якими величинами f і густиною коливань $\overline{\rho' f'}$. Щоб уникнути цих труднощів використовують середньозважені величини (так звані осереднення за Фавром) [3]

$$\tilde{f} = \frac{\overline{\rho f}}{\bar{\rho}}. \quad (1.139)$$

Будь-яка величина f може бути розділена на середню і складову коливання

$$f = \tilde{f} + f'' \text{ при } \tilde{f}'' = 0. \quad (1.140)$$

Використовуючи ці формулювання, усереднені рівняння (1.135)–(1.137) можна представити в такому вигляді:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} \tilde{u}_i) = 0; \quad (1.141)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j) + \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\tau}_{ij} - \overline{\rho \tilde{u}_i'' \tilde{u}_j''}); \quad (1.142)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{h}_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{h}_s) = \frac{\bar{D}_p}{D_t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} - \overline{\rho u_i'' h_s''} \right) + \bar{\tau}_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + q_v, \quad (1.143)$$

де $\frac{\bar{D}_p}{D_t} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + u_i \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \tilde{u}_i \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + u_i'' \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}$ – повна або субстанціональна похідна

від тиску.

Ці рівняння формально аналогічні до класичних рівнянь усереднених за Рейнольдсом для потоків однакової густини [3, 8].

Для замикання невідомих величин у рівняннях (1.141)–(1.143) треба вибрати яку-небудь модель турбулентності [3, 7]. Якщо, наприклад, вибрати модель з двома рівняннями – k – ε . При такому підході [3, 7] турбулентна в'язкість визначається співвідношенням

$$\mu_t = \bar{\rho} C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad (1.144)$$

де турбулентна кінетична енергія k і швидкість її дисипації ε описуються за допомогою двох рівнянь балансу:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{\rho}\tilde{u}_i k) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_t} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] + P_k - \bar{\rho}\varepsilon; \quad (1.145)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{\rho}\tilde{u}_i \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right] + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P_k - C_{\varepsilon 2} \bar{\rho} \frac{\varepsilon^2}{k}. \quad (1.146)$$

Член P_k визначається як

$$P_k = -\bar{\rho}\tilde{u}_i''\tilde{u}_j'' \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i}, \quad (1.147)$$

де $\bar{\rho}\tilde{u}_i''\tilde{u}_j''$ – напруження Рейнольдса, визначаються використовуючи вираз Бусінеска [3].

Константи в k – ε моделі турбулентності зазвичай беруть [3]

$$C_\mu = 0.09; \quad \sigma_k = 1.0; \quad \sigma_\varepsilon = 1.3; \quad C_{\varepsilon 1} = 1.44; \quad C_{\varepsilon 2} = 1.92.$$

Ця модель користується великою популярністю завдяки своїй простоті й економічній ефективності.

Для замикання системи рівнянь (1.141)–(1.147) необхідно записати відповідні початкові і граничні умови.

Математичну модель тепло-гідродинамічного стану (1.141)–(1.147) турбулентного потоку стисливої рідини на основі осереднених за Рейнольдсом та Фавром рівнянь Нав'є-Стокса (RANS) у наближенні стандартної k – ε моделі можна записати в більш компактній векторній формі. Використовуючи для позначення часу змінну τ , а для вектора швидкості – $\tilde{\mathbf{V}}$, матимемо:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \tau} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{V}}) = 0; \\ \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{\mathbf{V}}}{\partial \tau} + (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{V}} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{V}} = -\nabla p + \nabla \cdot \bar{\bar{\tau}}_{\text{eff}} + \bar{\rho} \mathbf{g}; \\ \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{h}}{\partial \tau} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{V}} \tilde{h}) = \frac{\overline{Dp}}{D\tau} + \nabla \cdot \left(\frac{\overline{\lambda \nabla T}}{Sc_t} + \frac{\overline{\mu_t \nabla h}}{Sc_t} \right) + \\ + \bar{\bar{\tau}}_{\text{eff}} : \nabla \mathbf{V} + E(\tilde{T}); \\ \frac{\partial \bar{\rho} k}{\partial \tau} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{V}} k) = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right] + P_k - \bar{\rho} \varepsilon; \\ \frac{\partial \bar{\rho} \varepsilon}{\partial \tau} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{V}} \varepsilon) = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right] + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P_k - C_{\varepsilon 2} \bar{\rho} \frac{\varepsilon^2}{k}, \end{array} \right. \quad (1.148)$$

де $\bar{\rho}$ – густина, осереднена за Reynolds, кг/м³; τ – час, с; $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ –

оператор Гамільтона; $\tilde{\mathbf{V}}^T = (\tilde{V}_x, \tilde{V}_y, \tilde{V}_z)$ – вектор швидкості, осереднений за Favre $(\tilde{f} = \overline{\rho f} / \bar{\rho})$, м/с; p – тиск, Па;

$\bar{\bar{\tau}}_{\text{eff}} = (\mu + \mu_t) \left[\nabla \tilde{\mathbf{V}} + (\nabla \tilde{\mathbf{V}})^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{V}}) \mathbf{I} \right] - \frac{2}{3} \bar{\rho} k$ – тензор ефективних напружень

розтягу-стискання, Па; μ – динамічна в'язкість, Па·с; $\mu_t = \bar{\rho} C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$ – турбулентна в'язкість, Па·с; k – турбулентна кінетична енергія, Дж/кг; ε – швидкість дисипації турбулентної кінетичної енергії, Дж/(кг·с); \mathbf{I} – одиничний тензор другого рангу; $\mathbf{g}^T = (g_x, g_y, g_z)$ – вектор гравітаційного навантаження, м/с²;

$Sc_t = \frac{\mu_t}{\rho D_t}$ – число Шмідта; $\tilde{h} = \int_{T_{\text{ref}}}^{\tilde{T}} c_p dT$ – масова ентальпія, Дж/кг; c_p – масова теплоємність, Дж/(кг·К); T – температура, К; T_{ref} – температура відліку, К;

$\frac{\overline{Dp}}{D\tau} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial \tau} + \tilde{\mathbf{V}} \cdot \nabla \bar{p} + \frac{\mu_t}{\bar{\rho} Sc_t} \nabla \bar{p}$ – субстанціональна похідна від тиску, Вт/м³;

λ – теплопровідність, Вт/(м·К); $:$ – оператор скалярного добутку тензора на

градієнт; $E(\tilde{T}) = K \left(\int_{\Omega=4\pi} I(s) d\Omega - 4n^2 \sigma T^4 \right)$ – об'ємна густина радіаційного теп-

лового потоку «сірого» випромінювального й поглинального середовища, Вт/м³; K і n – коефіцієнт поглинання (м⁻¹) і показник заломлення, відповідно;

Ω – тілесний кут, ср; σ – стала Стефана-Больцмана, Вт/(м²·К⁴);
 $I(s) = I(s_0) \exp\left(-\int_{s_0}^s K ds\right) + n^2 \sigma \int_{s_0}^s K \exp\left(-\int_{s'}^s K ds''\right) ds'$ – інтенсивність випромінювання (Вт·с/(м²·ср)) у напрямку s у тілесному куті $d\Omega$; s_0 – відповідає границі;
 $P_k = \left[\mu_t \left[\nabla \tilde{\mathbf{V}} + (\nabla \tilde{\mathbf{V}})^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{V}}) I \right] - \frac{2}{3} \bar{\rho} k \right] : (\nabla \tilde{\mathbf{V}})$ – об'ємне джерело за рахунок турбулентної в'язкості потоку, Вт/м³; $C_\mu = 0.09$, $\sigma_k = 1.0$, $\sigma_\varepsilon = 1.3$, $C_{\varepsilon 1} = 1.44$, $C_{\varepsilon 2} = 1.92$ – константи стандартної $k - \varepsilon$ моделі.

Перший член у правій частині рівняння енергії (1.143), (1.148) пов'язаний з роботою тиску, другий – з теплопровідністю, четвертий – з дисипацією в'язкості, п'ятий – з тепловим випромінюванням.

Для твердих елементів апарату система рівнянь (1.148) спрощується до одного рівняння енергії (теплопровідності) виду

$$\frac{\partial \rho h}{\partial \tau} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + q_v. \quad (1.149)$$

Початкові умови:

$$\begin{cases} T(X) = T_0; \\ \mathbf{V}(X) = 0; \\ k(X) = k_0; \\ \varepsilon(X) = \varepsilon, \end{cases} \quad (1.150)$$

де $X(x, y, z) \in \Omega_0$ – декартові координати, м; Ω_0 – розрахункова область.

Граничні умови:

– на вході в апарат

$$\begin{cases} G = G_{\text{inlet}}; \\ T = T_{\text{inlet}}; \\ k = k_{\text{inlet}}; \\ \varepsilon = \varepsilon_{\text{inlet}}, \end{cases} \quad (1.151)$$

де G – масова витрата, кг/с;

– на виході з апарату

$$\begin{cases} p_{\text{outlet}} = 0; \\ T = T_{\text{outlet}}; \\ k = k_{\text{outlet}}; \\ \varepsilon = \varepsilon_{\text{outlet}}, \end{cases} \quad (1.152)$$

– на границі контакту твердих елементів конструкції апарату (абсолютний контакт)

$$\begin{cases} \{T\} = 0; \\ \{\mathbf{n} \cdot \mathbf{q}\} = 0, \end{cases} \quad (1.153)$$

де $\{T\} = T^+ - T^-$; $\{\mathbf{n} \cdot \mathbf{q}\} = \mathbf{n}^+ \cdot \mathbf{q}^+ - \mathbf{n}^- \cdot \mathbf{q}^-$; $\mathbf{q} = -\lambda \nabla T$ – вектор густини теплового потоку, Вт/м²; \mathbf{n} – вектор нормалі до поверхні контакту;

– на границі газовий тракт-канали апарату

$$\begin{cases} \mathbf{V} = 0; \\ \{T\} = 0; \\ \{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{q}_r)\} = 0, \end{cases} \quad (1.154)$$

де \mathbf{q}_r – вектор густини радіаційного теплового потоку, Вт/м²;

– на границі контакту огорожень апарату з оточуючим середовищем

$$\mathbf{n} \cdot (-\lambda \nabla T) = \alpha_{\text{eff}}(T)(T - T_{\text{env.sp}}), \quad (1.155)$$

де α_{eff} – ефективний коефіцієнт тепловіддачі, Вт/(м²·К); $T_{\text{env.sp}}$ – температура оточуючого середовища, К.

Математичне формулювання (1.148)–(1.155) є достатнім для числового моделювання, наприклад, за допомогою обчислювальної системи ANSYS, тепло-гідродинамічного стану промислового обладнання різноманітних виробництв (від теплообмінного обладнання до печей, хімічних реакторів та ін.) у наближенні RANS з врахуванням турбулентності технологічних потоків.

У випадку ламінарного режиму течії нестисливої рідини в наближенні Бусінеска [9] система (1.148) значно спрощується і включає: квазістаціонарне рівняння нерозривності, рівняння збереження кількості руху (три рівняння для кожної координати) і енергії

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{V} = 0; \\ \rho_0 (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{V} - \rho_0 \beta (T - T_0) \mathbf{g}; \\ c_p \rho_0 \nabla \cdot (\mathbf{V} T) = \nabla \cdot [\lambda(T) \nabla T] + q_v, \end{cases} \quad (1.156)$$

де $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ – оператор Гамільтона або градієнта, м^{-1} ; $\mathbf{V}^T = (V_x, V_y, V_z)$ – вектор швидкості, м/с ; ρ_0 – густина за температури T_0 , кг/м^3 ; p – тиск, Па ; $\Delta = \nabla^2$ – оператор Лапласа, м^{-2} ; μ – динамічна в'язкість, $\text{Па}\cdot\text{с}$; β – коефіцієнт лінійного температурного розширення, К^{-1} ; $\mathbf{g} = (g_x, g_y, g_z)^T$ – вектор гравітаційного навантаження, м/с^2 ; c_p – масова теплоємність, $\text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$; T – температура, К ; λ – теплопровідність, $\text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$; q_v – об'ємне джерело, яке пов'язано з тепловим випромінюванням, фазовими переходами та хімічними реакціями, Вт/м^3 .

Для багатьох випадків вільної конвекції можна скористатись спрощеною моделлю Бусінеска для рідини з температурною залежністю густини виду $\rho = \rho_0(1 - \beta\Delta T)$, де $\Delta T = T - T_0$, яка передбачає таку заміну гравітаційного члену рівняння збереження кількості руху

$$(\rho - \rho_0)\mathbf{g} \approx \rho_0\beta(T - T_0)\mathbf{g}.$$

Наближення Бусінеска справедливо для випадків, коли: $\beta(T - T_0) \ll 1$.

Початкові умови

$$\begin{cases} T(X) = T_0; \\ \mathbf{V}(X) = 0, \end{cases} \quad (1.157)$$

де $X(x, y, z) \in \Omega_0$ – декартові координати, м ; Ω_0 – розрахункова область.

Граничні умови:

– на вході в апарат

$$\begin{cases} G = G_{\text{inlet}}; \\ T = T_{\text{inlet}}, \end{cases} \quad (1.158)$$

де G – масова витрата, кг/с ;

– на виході з апарату

$$\begin{cases} p_{\text{outlet}} = 0; \\ T = T_{\text{outlet}}, \end{cases} \quad (1.159)$$

– на границі контакту твердих елементів конструкції апарату (абсолютний контакт)

$$\begin{cases} \{T\} = 0; \\ \{\mathbf{n} \cdot \mathbf{q}\} = 0, \end{cases} \quad (1.160)$$

де $\{T\} = T^+ - T^-$; $\{\mathbf{n} \cdot \mathbf{q}\} = \mathbf{n}^+ \cdot \mathbf{q}^+ - \mathbf{n}^- \cdot \mathbf{q}^-$; $\mathbf{q} = -\lambda \nabla T$ – вектор густини теплового потоку, Вт/м²; \mathbf{n} – вектор нормалі до поверхні контакту;
– на границі газовий тракт-тверда стінка

$$\begin{cases} \mathbf{V} = 0; \\ \{T\} = 0; \\ \{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{q}_r)\} = 0, \end{cases} \quad (1.161)$$

де \mathbf{q}_r – вектор густини радіаційного теплового потоку, Вт/м²;
– на границі контакту огорожень апарату з оточуючим середовищем

$$\mathbf{n} \cdot (-\lambda \nabla T) = \alpha_{\text{eff}}(T)(T - T_{\text{env.sp}}), \quad (1.162)$$

де α_{eff} – ефективний коефіцієнт тепловіддачі, Вт/(м²·К); $T_{\text{env.sp}}$ – температура оточуючого середовища, К.

Математичне формулювання (1.156)–(1.162) є достатнім для числового моделювання за допомогою обчислювальної системи ANSYS (або OpenFOAM) тепло-гідродинамічного стану ламінарних потоків теплоносіїв, наприклад, теплообмінного обладнання з визначенням таких фізичних полів як: тиск, швидкість, температура, густина теплового потоку (сумарного й радіаційного), коефіцієнт тепловіддачі та ін.

На підставі проведених розрахунків за допомогою програмного продукту ANSYS (FLUENT) (або OpenFOAM) неважко скласти матеріальний та тепловий баланс.

Визначення турбулентності. Відповідно до схеми Ландау (запропонованої 1944 р.) турбулентність є результатом послідовної втрати стійкості течій з менш складною структурою з формуванням течій з більш складною структурою.

Запитання для самоконтролю

1. Які передумови використовуються при виведенні диференціального рівняння теплопровідності і на яких фундаментальних законах фізики базується його вивід?
2. Що включають умови однозначності?
3. Які типи граничних умов при розв'язанні рівняння теплопровідності Ви знаєте?
4. Поясніть фізичний зміст, теплоємності, теплопровідності й температуропровідності?
5. У чому полягає основна відмінність між стаціонарним і нестаціонарним рівняннями теплопровідності? До яких типів рівнянь математичної фізики вони відносяться?

6. Надайте визначення ентальпії.
7. Які диференціальні рівняння в частинних похідних описують перенос теплоти в рідинах?
8. На якому законі базується вивід рівняння нерозривності?
9. Сформулюйте закон збереження маси для елементарного об'єму.
10. Що розуміють під вектором масової швидкості?
11. Запишіть рівняння нерозривності через похідну за часом і субстанціональну похідну у векторній формі та розкрийте фізичний зміст кожного його члена.
12. Запишіть субстанціональну похідну для густини.
13. Запишіть рівняння нерозривності для випадку $\rho = \text{const}$.
14. Сформулюйте складові балансу кількості руху для елементарного об'єму рідини?
15. Які Ви знаєте два механізми переносу кількості руху в рідині?
16. Запишіть рівняння збереження кількості руху рідини у векторній формі та розкрийте фізичний зміст кожного його члена.
17. На якому законі базується вивід рівняння збереження кількості руху? Відповідь проілюструйте на формі запису рівняння збереження кількості руху через субстанціональну похідну.
18. Запишіть співвідношення для тензора тертя рідини.
19. Сформулюйте закон Стокса.
20. Фізичний зміст динамічної в'язкості рідини.
21. Запишіть рівняння збереження кількості руху для випадку $\rho = \text{const}$.
22. Які форми запису рівняння збереження кількості руху називають рівняннями Нав'є-Стокса та Ейлера? У яких випадках застосовують рівняння Ейлера?
23. Запишіть дві форми рівняння збереження механічної енергії та розкрийте фізичний зміст його членів.
24. Запишіть рівняння збереження повної енергії у векторній формі та розкрийте фізичний зміст його членів.
25. Запишіть рівняння збереження потенціальної енергії у векторній формі та розкрийте фізичний зміст його членів.
26. Запишіть різні форми рівняння енергії для окремих випадків.
27. Що містять крайові умови для рівнянь нерозривності, руху та енергії?
28. Що таке теплове випромінювання?
29. Дайте визначення інтегрального променистого потоку випромінювання, його густини та густини монохроматичного потоку випромінювання.
30. Що таке $E_{\text{пад}}$ – падаюче, $E_{\text{пог}}$ – поглинуте; $E_{\text{відб}}$ – відбите і $E_{\text{пр}}$ – пропущене випромінювання?
31. Дайте визначення ступеня чорноти тіла, коефіцієнта відбиття тіла і

коефіцієнта пропускання тіла.

32. Дайте визначення абсолютно чорного тіла, абсолютно дзеркального та абсолютно білого.

33. Визначення густини ефективного випромінювання.

34. Основні визначення об'ємного випромінювання. Коефіцієнт поглинання і розсіювання середовища.

35. Закон Планка, його графічне представлення. Закон Планка в безрозмірному виді.

36. Закон Релея-Джинса.

37. Закон зміщення Віна.

38. Закон Стефана-Больцмана.

39. Закон Кірхгофа.

40. Закон Ламберта.

41. Чорні температури та їх практичне застосування.

42. Визначення турбулентності течії.

43. Назвіть три основні моделі турбулентності течії, на яких базується обчислювальна гідродинаміка (Computational Fluid Dynamics, CFD).

44. Які основні відмінності між моделями турбулентності RANS, LES і DNS?

45. У чому полягає осереднення за Рейнольдсом та Фавром?

46. Які рівняння включає математична модель тепло-гідродинамічного стану потоку рідини за ламінарного режиму течії нестисливої рідини в наближенні Бусінеска?

47. У чому полягає наближення Бусінеска?

48. Які граничні умови використовуються для математичного формулювання тепло-гідродинамічного стану потоку нестисливої рідини за ламінарного режиму її руху?

49. Які рівняння включає математична модель тепло-гідродинамічного стану турбулентного потоку стисливої рідини на основі осереднених за Рейнольдсом та Фавром рівнянь Нав'є-Стокса (RANS) у наближенні стандартної $k - \epsilon$ моделі турбулентності.

50. Які граничні умови використовуються для математичного формулювання тепло-гідродинамічного стану потоку стисливої рідини за турбулентного режиму її руху?

2. ЧИСЛОВІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ. ОБЛАСТЬ ЗАСТОСУВАННЯ ТА КЛАСИФІКАЦІЯ

2.1. Числові методи розв'язання задач теорії поля та механіки суцільного середовища

До основних та широко застосовуваних числових методів на практиці розв'язання задач математичної фізики можна віднести такі: метод скінченних різниць (МСР), метод скінченних елементів (МСЕ), метод скінченних об'ємів (МСО), метод граничних елементів (МГЕ), метод дискретних ординат (МДО), зональний метод (ЗМ) та ін.

Метод скінченних різниць [10–12] базується на апроксимації скінченними-різницями вихідного диференціального рівняння в частинних похідних на певному сітковому шаблоні, який є результатом дискретизації або заміни безперервної області сукупністю дискретних точок (вузлів). У результаті чого здійснюється перехід від безперервної до дискретної функції й розв'язок вихідного рівняння в частинних похідних зводиться до розв'язку системи алгебричних рівнянь. Для отримання скінченно-різницевого аналогу рівняння в частинних похідних можуть бути використані різні методи: розкладання функцій в ряд Тейлора; інтерполяція функцій поліномами; інтегро-інтерполяційний метод або метод контрольного об'єму. Перші три методи відносяться до формальних методів побудови різницевої схеми, тому що при цьому використовуються тільки відповідний математичний апарат без врахування фізичних законів збереження. При застосуванні ряду Тейлора одночасно чітко визначається порядок апроксимації отриманої дискретної похідної.

При використанні методу контрольного об'єму різницева схема будується на базі фізичних законів збереження, наслідком яких є певне рівняння в частинних похідних. Якщо рівняння в частинних похідних записано в дивергентній формі, то закон збереження можна отримати, інтегруючи це рівняння по контрольному об'єму застосовуючи формулу Гауса-Остроградського [13]. На практиці цей метод завжди дає консервативні різницеві схеми [11, 12]. Наразі метод контрольного об'єму виділився в окремий метод [14] і дістав назву методу скінченних об'ємів (переважно в зарубіжній літературі) і був розвинутий для неструктурованих сіток тіл довільної форми.

МСР застосовується майже для всіх задач математичної фізики з областями правильної геометрії, за виключенням, наприклад, задач радіаційного теплообміну. Для областей зі складною геометрією треба виконувати перетворення вихідних рівнянь за допомогою узагальнених криволінійних координат [10], що значно ускладнює алгоритм розв'язання задачі.

Метод скінченних елементів [15, 16]. З точки зору обчислювальної ма-

тематики основна ідея МСЕ полягає в тому, що мінімізація функціоналу варіаційної задачі здійснюється на сукупності функцій, кожна із яких визначена на своїй підобласті. Тобто МСЕ базується на одному із варіаційних методів – методі Рітца (для задач теорії пружності) і відноситься до одного із напрямків діакоптики – загального методу дослідження складних систем шляхом їх розчленування. При цьому довільна розрахункова область розбивається на скінченні елементи (наприклад, на довільні чотириохгранники або шестигранники), усередині кожного з яких задаються деякі функції форми, які дозволяють визначити шукану функцію усередині елемента за її значенням у вузлах, тобто в місцях стиковки скінченних елементів. За координатні функції беруть функції, тотожно рівні нулю всюди, окрім одного скінченного елемента, усередині якого вони є функціями форми. За невідомі коефіцієнти методу Рітца беруться вузлові переміщення. Мінімізація функціоналу енергії приводить до системи алгебричних рівнянь, тобто аналогічно варіаційно-різницеvim методам.

Область застосування МСЕ значно розширилась після вставлення можливості отримання рівнянь, що визначають скінченні елементи, за допомогою варіантів методу зваженого нев'язання, такого як метод Гальоркіна або найменших квадратів [13]. Це дало можливість теоретичного обґрунтування МСЕ при розв'язанні багатьох типів диференціальних рівнянь. Таким чином, МСЕ перетворився в загальний метод числового розв'язку диференціальних рівнянь у частинних похідних та їх систем. Значним недоліком МСЕ, як і інших варіаційних методів, є складність отримання апріорних оцінок.

Метод скінченних об'ємів [14]. Найбільш ефективним числовим методом розв'язання CFD-задач (computational fluid dynamics) є МСО, який має безсумнівну перевагу по відношенню до інших числових методів, яка полягає в дотриманні фундаментального закону збереження енергії в кожній розрахунковій комірці, поза залежністю від параметрів дискретизації розрахункової області, тобто не залежить від розмірів та кількості розрахункових комірок. МСО дозволяє будувати консервативні дискретні аналоги вихідних диференціальних рівнянь на етапі свого формулювання, тому що відправною його точкою є інтегральне формулювання законів збереження маси, імпульсу, енергії та інших (формула Гауса й теорема Гауса-Остраградського, як вище відмічалося). Інтегральні співвідношення МСО записуються для довільного контрольного об'єму, а їх дискретний аналог визначається сумуванням по всіх гранях скінченного об'єму потоків імпульсу, маси та ін., з використанням відповідних квадратурних формул. Оскільки інтегральне формулювання законів збереження не накладає обмежень на форму контрольного об'єму, МСО придатний для дискретизації рівнянь гідро-газодинаміки як на структурованих, так і на неструктурованих сітках з різноманітною формою комірок, що також не накладає обмежень на ступінь складності геометрії розрахункової області. Також МСО можна достатньо успішно застосовувати як для задач гідро-дина-

міки, так і для задач теплопровідності твердих тіл і цілого ряду інших задач, тобто розв'язувати спряжені задачі.

Метод граничних елементів базується на теорії інтегральних рівнянь [17]. Суть методу полягає в перетворенні диференціального рівняння в частинних похідних, яке описує поведінку невідомої функції усередині й на границі області, в інтегральне рівняння, яке визначає тільки граничні значення, і потім знаходження числового розв'язку цього рівняння. При цьому розмірність задачі зменшується на одиницю.

Наразі твердо встановлено, що метод граничних елементів є важливим, альтернативним по відношенню до існуючих числових підходів з дослідження в механіці суцільного середовища [17–19]. Існує два основних формулювання МГЕ: пряме й непряме. У прямому формулюванні (ПМГЕ) невідомі функції що входять у інтегральне рівняння, співпадають з функціями вихідного диференціального рівняння в частинних похідних і, тому мають певний фізичний зміст. У непрямому формулюванні (НМГЕ) інтегральні рівняння повністю виражаються через фундаментальний сингулярний розв'язок [17] вихідних диференціальних рівнянь, який розподілений з невідомою густиною на границі області. Функції густини не мають певного фізичного змісту, але коли вони знайдені, то значення фізичних функцій вихідної задачі може бути визначено простим інтегруванням. Еквівалентність прямого та непрямого формулювання було вперше доведено В. Д. Купрадзе [20].

Метод дискретних ординат [21–23] базується на тих самих засадах, що й МСО, але має відношення до рівняння переносу. Цим фактом і пояснюється його широке застосування останнім часом для розв'язання задач гідродинаміки потоків газів та рідини при високих температурах, алгоритми яких побудовані на МСО і в яких обов'язково треба враховувати радіаційний теплообмін.

Зональний метод [24, 25] базується на складанні рівняння балансу енергії для кожного елементу (зони) об'єму й дифузної поверхні, яка оточує весь об'єм частково прозорого випромінювального та поглинального матеріалу. Поверхневі та об'ємні зони отримують у результаті дискретизації розрахункової області. Температуру кожної зони беруть сталою. Для запису рівняння балансу кожного елемента попередньо обчислюються коефіцієнти опромінення (КО) трьох типів з врахуванням поглинання середовища: між елементами поверхонь, поверхнями та об'ємами й між об'ємами. Враховуючи кількість КО і те, що КО описуються багатократними інтегралами [24], ця процедура є досить громіздкою. Так, наприклад, при N – поверхневих зон і M – об'ємних, необхідно обчислити N^2 – поверхневих КО, M^2 – об'ємних КО та $M \times N$ – КО об'єм–поверхня. У результаті складання балансових рівнянь для кожної зони розрахункової області виходить система алгебричних рівнянь відносно невідомих потоків або температур. ЗМ можна застосовувати разом з іншими методами, наприклад, з МСР для розрахунку радіаційно-кондуктивного або раді-

аційно-конвективного теплообміну.

Для з'ясування формальних підходів, застосовуваних у вищерозглянутих числових методах, певний інтерес представляє раціональна класифікація числових методів, що представлена в монографії К. Brebbia та ін. [17]. У ній показано, що для методів зваженого нев'язання, на прикладі рівняння Пуассона ($\Delta u + b = 0$, де u – шукана функція, b – джерело), можна застосувати наступну класифікацію:

– вихідне формулювання (I)

$$\int_{\Omega} (\Delta u + b) w d\Omega = \int_{\Gamma_2} (q - \bar{q}) w d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (u - \bar{u}) \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma,$$

де Ω – розрахункова область; w – вагова функція; q – густина потоку; $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ – границя Ω , причому на Γ_1 задані ГУ Дирихле $u = \bar{u}$, а на Γ_2 задані ГУ Неймана $q = \bar{q}$; n – зовнішня нормаль до Γ ;

– послаблене формулювання (II)

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial w}{\partial x_k} d\Omega + \int_{\Omega} b w d\Omega = \int_{\Gamma_2} \bar{q} w d\Gamma + \int_{\Gamma_1} q w d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (u - \bar{u}) \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma,$$

де x_k – координати, $k = \overline{1, m}$; m – розмірність задачі;

– обернене формулювання (III)

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 w) u d\Omega + \int_{\Omega} b w d\Omega = - \int_{\Gamma_2} \bar{q} w d\Gamma - \int_{\Gamma_1} q w d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u} \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma.$$

Наведена класифікація дозволяє встановлювати відмінності між різними наближеними методами. Інша суттєва різниця між підходами в числових методах полягає у виборі базисних функцій, які використовуються для наближеного задання функції u та вагової функції w . Числові методи можуть відрізнятися між собою за способом задання базисних функцій для представлення u і w . Базисні функції можуть бути однакові або різні.

Раціональна класифікація числових методів за [17] представлена на рис. 1.1, з якої витікає, що основні числові методи можна розбити на такі три групи:

1) МСР. Тут зазвичай використовуються різні базисні функції для u і w , причому останні беруться у формі дельта-функцій Дірака [13]. Більшість скінченно-різницевих схем базується на формулюванні I, хоча для деяких (подібних енергетичним, у яких використовується контрольний об'єм) підходів застосовується формулювання II.

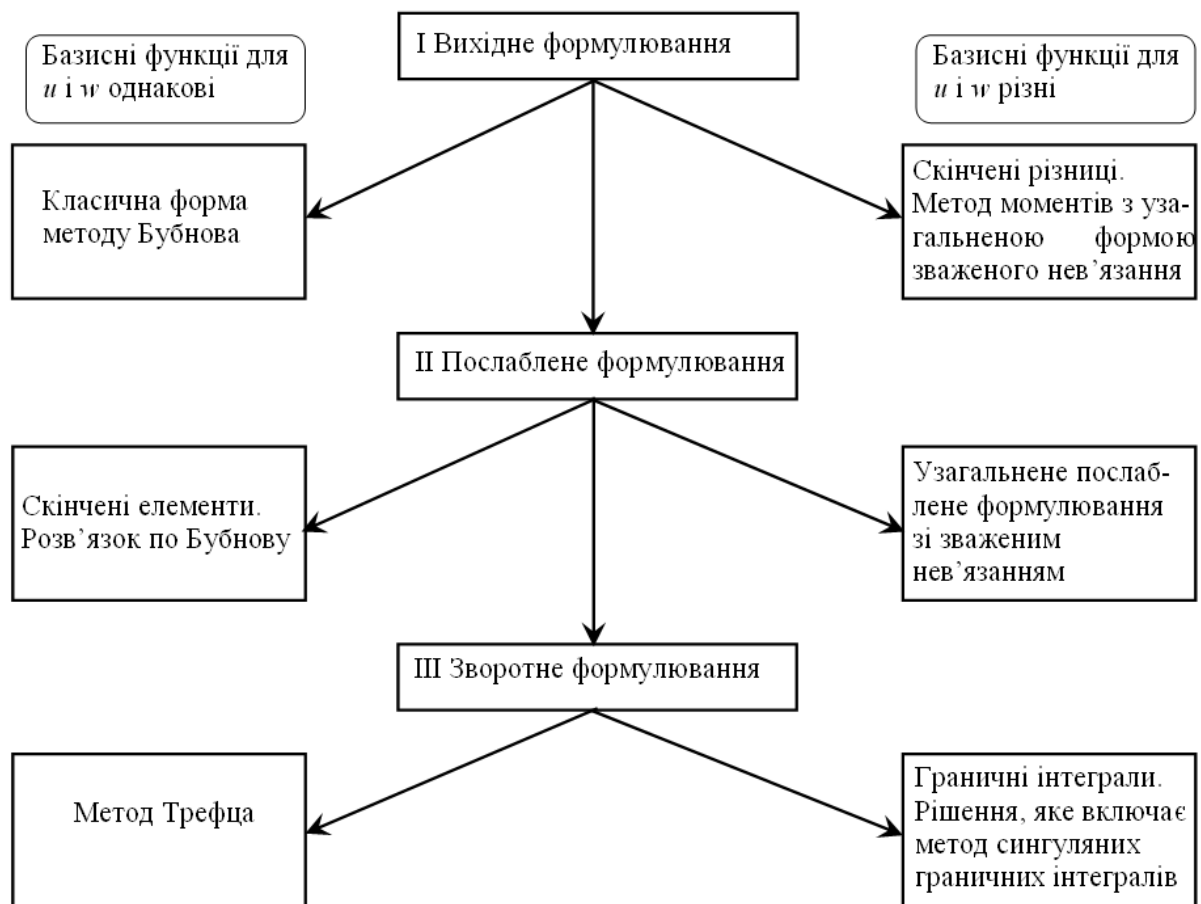


Рис. 1.1. Класифікація різних наближених методів [17]

2) МСЕ. Тут звичним є використання однакових базисних функцій для u і w , що призводить до симетричних матриць. Схеми зі скінченними елементами базуються на послабленому формулюванні II.

3) МГЕ. Схеми з граничними елементами зазвичай базуються на оберненому формулюванні III. Для вагової функції w тут використовується така система базисних функцій, яка перетворює інтеграли по області Ω у нуль і зводить таким чином задачу до визначення тільки граничних функцій. У теорії МГЕ під w , як правило, розуміють фундаментальний сингулярний розв'язок вихідного диференціального рівняння в частинних похідних.

Виходячи з розглянутої класифікації (див. рис. 1.1) можна зазначити, що МСО належить до 2-ї групи наближених методів з послабленим формулюванням і різними базисними функціями для u і w . Це також стосується МДО і ЗМ, хоч ці методи мають відношення тільки до рівняння переносу.

2.2. Методи розв'язання систем дискретних рівнянь

В результаті застосування будь-якого з розглянутих числових методів до вихідних диференціальних рівнянь задачі, що розв'язується, ми зазвичай от-

римуємо систему дискретних рівнянь або систему лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР) виду

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (2.1)$$

де \mathbf{A} – квадратна матриця; \mathbf{x} – вектор невідомих; \mathbf{b} – вектор вільних членів.

Винятком є тільки явні схеми апроксимація за часом, які не потребують розв’язання СЛАР (п. 3.2).

Всі методи розв’язання СЛАР поділяються на прямі та ітераційні [26]. Прямі методи дають розв’язок за скінченне число дій, прості та найбільш універсальні. Для систем невеликого порядку $n < 200$ застосовуються практично тільки прямі методи. Ітераційні методи застосовуються тільки для систем спеціального виду зі слабо заповненою (розрідженою) матрицею [41] дуже великого порядку $n > (10^3 - 10^6)$. При розв’язанні СЛАР з погано обумовленими матрицями, коли $\det A \rightarrow 0$ застосовуються методи регуляризації [26], метод спряжених градієнтів [32] та ін.

До прямих методів відносяться [26]: метод виключення Гауса, прогонки, оптимального виключення, облямування, відображень, ортогоналізації, метод Жордана та ін.

До ітераційних методів розв’язання СЛАР відносяться [26]: стаціонарний метод простих ітерацій, метод Зейделя або Гауса-Зейделя, метод спряжених градієнтів та ін.

Розглянемо більш детально згадані вище методи розв’язання СЛАР.

2.2.1. Загальні характеристики прямих методів розв’язання СЛАР

Метод виключення Гауса для довільної системи рівнянь базується на приведенні матриці системи до трикутного вигляду. Нехай маємо СЛАР виду

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n, \\ \text{або } \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k &= b_i, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Віднімемо від другого рівняння системи (2.2) перше, помножене на таке число, щоб коефіцієнт при x_1 став дорівнювати нулю. Потім таким же чином віднімемо перше рівняння з третього, четвертого і т.д. рівнянь. Тоді виключаться всі коефіцієнти першого стовпця, що лежать нижче головної діагоналі

матриці \mathbf{A} . Тобто, $a_{i1} = 0, i = \overline{2, n}$.

Потім за допомогою другого рівняння (2.2) виключимо з третього, четвертого і т.д. рівнянь коефіцієнти другого стовпця ($a_{i2} = 0, i = \overline{3, n}$). Послідовно продовжуючи цей процес, виключимо з матриці \mathbf{A} всі коефіцієнти, що лежать нижче головної діагоналі \mathbf{A} .

Тоді загальні формули цього процесу будуть такі. Нехай проведено виключення коефіцієнтів з $k-1$ стовпця. Тоді лишилися такі рівняння з ненульовими елементами нижче головної діагоналі

$$\sum_{j=k}^n a_{ij}^{(k)} x_j = b_i^{(k)}, \quad i = \overline{k, n}. \quad (2.4)$$

Помножимо k -й рядок на коефіцієнт

$$c_{mk} = a_{mk}^{(k)} / a_{kk}^{(k)}, \quad a_{kk}^{(k)} \neq 0, \quad m > k, \quad (2.5)$$

і віднімемо із m -го рядка. Перший ненульовий елемент цього рядка стане нульовим, а інші зміняться за формулами

$$\begin{aligned} a_{mp}^{(k+1)} &= a_{mp}^{(k)} - c_{mk} a_{kp}^{(k)}, \\ b_m^{(k+1)} &= b_m^{(k)} - c_{mk} b_k^{(k)}, \quad k < m, p \leq n. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Виконавши обчислення по (2.6) при всіх вказаних індексах, виключимо елементи k -го стовпця. Таке виключення називається *циклом* процесу, а виконання всіх циклів називається *прямим ходом* виключення Гауса, в результаті якого отримуємо матрицю трикутного виду.

У випадку, коли $a_{kk}^{(k)} = 0$, за допомогою перестановки рядків матриці ненульовий елемент переміщається на головну діагональ і обчислення продовжуються.

Зворотний хід методу Гауса виконується за формулами

$$\begin{aligned} x_n &= b_n / a_{nn}, \\ x_i &= \left(b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j \right) / a_{ii}, \quad i = \overline{n-1, 1}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

При розв'язанні СЛАР методом виключення Гауса потрібно приблизно виконати $\frac{2}{3}n^3$ арифметичних дій.

СЛАР з розрідженими матрицями часто зберігають у стрічковому вигляді [41]. У таких випадках також можна застосовувати метод Гауса, а в алгоритмічній його реалізації повинна враховуватися стрічкова структура мат-

риці [32].

Найбільш важливим окремим випадком методу Гауса є *метод прогонки*, який застосовується до систем з трьохдіагональною матрицею (п. 3.1). Такі системи рівнянь зазвичай записуються у канонічному вигляді

$$\begin{aligned} A_i x_{i-1} - C_i x_i + B_i x_{i+1} &= F_i, \quad i = \overline{1, n}, \\ A_1 &= B_n = 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Алгоритм розв'язання системи рівнянь (2.7) складається з прямого та зворотного ходу (п. 3.1), як і в методі виключення Гауса.

Прямий хід прогонки:

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{B_1}{C_1}, \quad \beta_2 = \frac{F_1}{C_1}, \\ \alpha_{i+1} &= \frac{B_i}{C_i - A_i \alpha_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{A_i \beta_i + F_i}{C_i - A_i \alpha_i}, \quad i = 2, 3, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Зворотний хід прогонки:

$$x_{n-1} = \beta_n, \quad x_i = \alpha_{i+1} x_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = n-2, n-3, \dots, 2. \quad (2.9)$$

Кількість арифметичних операцій в методі прогонки складає $9n$.

Умови стійкості методу прогонки:

$$A_i > 0, \quad B_i > 0, \quad C_i \geq A_i + B_i, \quad 2 \leq i \leq n-1.$$

Метод оптимального виключення має ту ж швидкість та потребує стільки ж пам'яті, що і метод Гауса.

Метод облямування практично не відрізняється від методу оптимального виключення і має ті ж характеристики.

Метод відображень потребує вдвічі більшої кількості арифметичних дій, чим метод Гауса.

Метод ортогоналізації втричі повільніше методу Гауса. Цей метод має деякі переваги при розв'язанні погано обумовлених системах рівнянь. Але при великих значеннях n сама ортогоналізації призводить до значної втрати точності розв'язку СЛАР.

Метод Жордана має ту ж саму швидкість, що і метод Гауса. При розв'язанні СЛАР він не дає ніяких переваг, але при оберненні матриці він вимагає меншу оперативну пам'ять.

2.2.2. Загальні характеристики ітераційних методів розв'язання СЛАР

Стаціонарний метод простих ітерацій базується на приведенні систе-

ми рівнянь (2.1) до еквівалентної системи виду

$$\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{d}. \quad (2.10)$$

Умова збіжності розв'язку $\|\mathbf{C}\| < 1$. Систему рівнянь виду (2.10) можна отримати за допомогою виділення діагональних елементів

$$x_k = \frac{1}{a_{kk}} \left(b_k - \sum_{i \neq k} a_{ki} x_i \right), \quad k = \overline{1, n}. \quad (2.11)$$

В запису (2.11) легко врахувати наявність нулів в матриці \mathbf{A} і при множенні матриці на вектор виконувати підсумовування тільки по ненульовим елементам. При використанні різних норм матриці достатні умови збіжності ітерацій приймають вигляд

$$\sum_{i \neq k} \left| \frac{a_{ki}}{a_{kk}} \right| < 1 \vee \sum_{k \neq i} \left| \frac{a_{ki}}{a_{kk}} \right| < 1 \vee \sum_k \sum_{i \neq k} \left| \frac{a_{ki}}{a_{kk}} \right|^2 < 1, \quad (2.12)$$

що означає переважання діагональних елементів матриці.

Ітераційний процес методу Гауса-Зейделя можна записати у формі (пп. 5.1, 5.2)

$$x_k^{(s+1)} = \frac{1}{a_{kk}} \left(b_k - \sum_{i=1}^{k-1} a_{ki} x_i^{(s+1)} - \sum_{i=k+1}^n a_{ki} x_i^{(s)} \right), \quad k = \overline{1, n}. \quad (2.13)$$

Алгоритм розв'язку СЛАР *методом спряжених градієнтів* з врахуванням стрічкової структури матриці можна представити таким чином [32]. Нехай маємо таку систему лінійних рівнянь

$$\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{d}. \quad (2.14)$$

Причому матриця \mathbf{C} – стрічкова і несиметрична.

Методика розв'язку системи (2.14) базується на CG алгоритмі [43]:

1. Спочатку задаємо початковий вектор розв'язку при $k = 0$, нехай $\mathbf{x}_0 = 0$. Потім знаходимо вектор нев'язок як $\mathbf{p}_0 = \mathbf{J}'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{x}_0 - \mathbf{C}^T \mathbf{d}$ для стрічкової матриці, де \mathbf{C}^T – транспонована матриця. У такому випадку будемо визначати послідовність векторів нев'язок $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots$ і розв'язків $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots$ і множини чисел β_k і α_k , відповідно нижченаведеним співвідношенням.

2. Алгоритм:

$$2.1. \beta_k = \begin{cases} 0, & \text{if } k = 0; \\ \frac{(\mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{p}_{k-1}, \mathbf{J}'(\mathbf{x}_k))}{(\mathbf{C} \mathbf{p}_{k-1}, \mathbf{C} \mathbf{p}_{k-1})} = \frac{(\mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{p}_{k-1}, \mathbf{J}'(\mathbf{x}_k))}{|\mathbf{C} \mathbf{p}_k|^2}, & \text{if } k > 0; \end{cases}$$

$$2.2. \mathbf{p}_k = \mathbf{J}'(\mathbf{x}_k) - \beta_k \mathbf{p}_{k-1};$$

$$2.3. \alpha_k = \frac{(\mathbf{J}'(\mathbf{x}_k), \mathbf{J}'(\mathbf{x}_k))}{(\mathbf{C} \mathbf{p}_k, \mathbf{C} \mathbf{p}_k)} = \frac{|\mathbf{J}'(\mathbf{x}_k)|^2}{|\mathbf{C} \mathbf{p}_k|^2};$$

$$2.4. \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \alpha_k \mathbf{p}_k.$$

3. Теоретично вектори \mathbf{x}_k і \mathbf{p}_k повинні задовольняти умовам:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_k &= \mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{x}_k - \mathbf{C}^T \mathbf{d}; (\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_k) = 0, \text{ для } i \neq k; \\ \mathbf{p}_n &= \mathbf{0}; \mathbf{x}_n = \mathbf{x}_\infty, \end{aligned}$$

де \mathbf{x}_∞ – точний розв’язок.

Запитання для самоконтролю

1. Сутність методу скінченних різниць і до якого класу методів відноситься МСЕ за раціональною класифікацією за Бребіа?
2. Область застосування методу скінченних різниць і його обмеження?
3. Сформулюйте переваги й недоліки відомих Вам числових методів?
4. Сутність методу скінченних елементів і до якого класу методів відноситься МСЕ за раціональною класифікацією за Бребіа?
5. Область застосування методу скінченних елементів і його обмеження?
6. На чому базується метод скінченних об’ємів і до якого класу методів відноситься МСЕ за раціональною класифікацією за Бребіа?
7. Для розв’язання яких задач застосовується метод скінченних об’ємів і його обмеження?
8. На чому базується метод дискретних ординат і до якого класу методів відноситься МДО за раціональною класифікацією за Бребіа? До яких задач застосовується МДО?
9. У чому полягають основні відмінності між ЗМ і МДО?
10. Прямі методи розв’язання СЛАР.
11. Ітераційні методи розв’язання СЛАР.
12. Сутність методу виключення Гауса.
13. Які із розглянутих числових методів призводять до СЛАР з повністю заповненою матрицею?

3. МЕТОД СКІНЧЕННИХ РІЗНИЦЬ

3.1. Методи побудови різницевих схем для нестационарного одновимірного рівняння теплопровідності

3.1.1. Загальні відомості

Існує три основних методи побудови різницевих схем:

- 1) метод різницевої апроксимації;
- 2) інтегро-інтерполяційний метод (метод балансу);
- 3) метод невизначених коефіцієнтів.

Метод різницевої апроксимації полягає в заміні похідних диференціальних рівнянь на різницеві аналоги. Цей метод достатньо простий та зручний у використанні. Недоліки – придатний тільки при $c, \rho, \lambda = \text{const}$ на рівномірних прямокутних сітках.

Інтегро-інтерполяційний метод (метод балансу) полягає в розбитті розрахункової області на комірки інтегрування відповідно до вибраного сіткового шаблону. Далі вихідне диференціальне рівняння інтегрується по комірках і приводиться до інтегральної форми. Після наближеного інтегрування отримується різницева схема. Цей метод дозволяє будувати консервативні різницеві схеми, тобто схеми, у яких виконується закон збереження енергії.

Метод невизначених коефіцієнтів полягає у виборі лінійної комбінації і значень різницевого розв'язку у вузлах сіткового шаблону. Коефіцієнти цієї лінійної комбінації визначаються із умови, щоб нев'язка схем мала як можна більш високий порядок малості відносно τ і h . Цей метод дозволяє будувати різницеві схеми на трикутних шаблонах.

Детальніше зупинимось на методі балансу. Розглянемо найбільш загальний випадок. Запишемо нелінійне нестационарне одновимірне рівняння теплопровідності в ентальпійній формі з внутрішнім джерелом теплоти

$$\frac{\partial H}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(t) \frac{\partial t}{\partial x} \right) + q_v(x, \tau), \quad 0 \leq x \leq \ell; \tau > 0, \quad (3.1)$$

де $H = \int_0^t c_p(t) \rho(t) dt$ – об'ємна ентальпія, Дж/м³; c_p – масова ізобарна теплоємність, Дж/(кг·К); ρ – густина, кг/м³; t – температура, °С; τ – час, с; x – координата, м; λ – теплопровідність, Вт/(м·К); q_v – об'ємна густина внутрішнього джерела теплоти, Вт/м³; ℓ – товщина шару, м.

Початкові умови при $\tau=0$

$$t(x)|_{\tau=0} = \psi(x). \quad (3.2)$$

Граничні умови (для простоти розглянемо ГУ I роду – Дирихле) при $\tau > 0$:

$$\begin{aligned} t|_{x=0} &= \varphi_1(\tau), \\ t|_{x=l} &= \varphi_2(\tau). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Рівняння (3.1) називається нелінійним, тому що його коефіцієнти залежать від температури. Ентальпійний запис цього рівняння використовується для того, щоб спростити процедуру лінеаризації за методом Ньютона та розв'язувати задачі з фазовими переходами 1-го роду.

Виберемо спочатку сітковий шаблон – у даному випадку триточковий з нерегулярною (нерівномірною) сіткою по координатах (рис. 3.1)

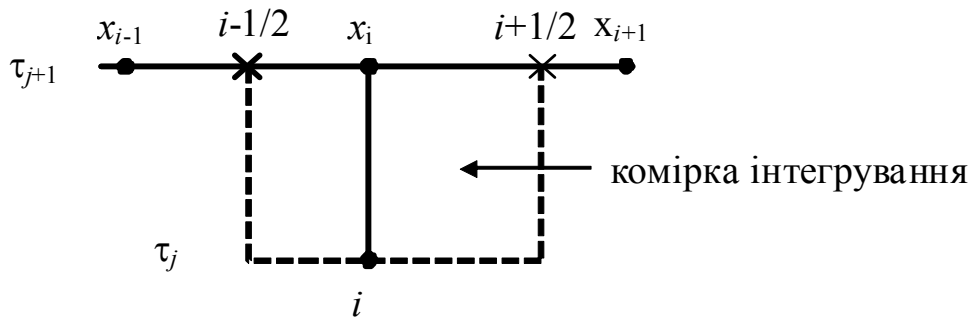


Рис. 3.1. Сітковий шаблон з нерегулярною сіткою (чисто неявна схема)

Відповідно до сіткового шаблону (див. рис. 3.1) виконаємо інтегрування (3.1)

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \frac{\partial H}{\partial \tau} d\tau dx = \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(t) \frac{\partial t}{\partial x} \right) dx d\tau + \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q_v(x) dx d\tau, \quad (3.4)$$

де $x_{i+1/2} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$, $x_{i-1/2} = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$.

Співвідношення (3.4) є точним. Далі наближено визначимо інтеграли (3.4) по середніх і правих прямокутниках, отримаємо

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \frac{\partial H}{\partial \tau} d\tau dx &= \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} (H^{j+1} - H^j) dx = (H_i^{j+1} - H_i^j) (x_{i+1/2} - x_{i-1/2}), \\ \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(t) \frac{\partial t}{\partial x} \right) dx d\tau &= \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \left[\left(\lambda(t) \frac{\partial t}{\partial x} \right)_{i+1/2} - \left(\lambda(t) \frac{\partial t}{\partial x} \right)_{i-1/2} \right] d\tau = \end{aligned}$$

$$= \left[\lambda_{i+1/2}^{j+1} \frac{t_{i+1}^{j+1} - t_i^{j+1}}{x_{i+1} - x_i} - \lambda_{i-1/2}^{j+1} \frac{t_i^{j+1} - t_{i-1}^{j+1}}{x_i - x_{i-1}} \right] (\tau^{j+1} + \tau^j) \\ \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q_v(x, \tau) dx d\tau = q_{vi}^{j+1} (x_{i+1/2} - x_{i-1/2}) (\tau^{j+1} + \tau^j),$$

де $\lambda_{i+1/2} = \frac{\lambda_i + \lambda_{i+1}}{2}$ або $\lambda_{i+1/2} = \sqrt{\lambda_i \lambda_{i+1}}$.

Замінюючи $j+1$ на знак «^», різницю $\tau_{j+1} - \tau_j$ на $\Delta\tau$ і розділивши ліву і праву частини (3.4) на $\Delta\tau$ і на $(x_{i+1/2} - x_{i-1/2})$, остаточно отримуємо

$$\frac{\hat{H}_i - H_i}{\Delta\tau} = \frac{1}{x_{i+1/2} - x_{i-1/2}} \left(\hat{\lambda}_{i+1/2} \frac{\hat{t}_{i+1} - \hat{t}_i}{x_{i+1} - x_i} - \hat{\lambda}_{i-1/2} \frac{\hat{t}_i - \hat{t}_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right) + \\ + \hat{q}_{vi} + O(h_{\min}^2 + \Delta\tau), \quad 2 \leq i \leq n-1, \quad (3.5)$$

де $h_{\min} = (x_{i+1/2} - x_{i-1/2})_{\min}$ – мінімальний крок інтегрування за координатою, m ; n – кількість вузлів на відрізку $0 \leq x \leq \ell$.

Система рівнянь (3.5) має другий порядок апроксимації за координатою й перший за часом. Схему (3.5) називають чисто неявною.

Якщо вибрати шеститочковий сітковий шаблон, то отримаємо явно-неявну схему (рис. 3.2)

$$\frac{\hat{H}_i - H_i}{\Delta\tau} = \frac{1}{2(x_{i+1/2} - x_{i-1/2})} \left[\hat{\lambda}_{i+1/2} \frac{\hat{t}_{i+1} - \hat{t}_i}{x_{i+1} - x_i} - \hat{\lambda}_{i-1/2} \frac{\hat{t}_i - \hat{t}_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} + \right. \\ \left. \lambda_{i+1/2} \frac{t_{i+1} - t_i}{x_{i+1} - x_i} - \lambda_{i-1/2} \frac{t_i - t_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right] + \frac{(\hat{q}_{vi} + q_{vi})}{2} + O(h_{\min}^2 + \Delta\tau^2), \quad 2 \leq i \leq n-1. \quad (3.6)$$

Схема (3.6) називається схемою Кранка-Ніколсона й має 2-й порядок апроксимації як по координаті, так і за часом. Основний недолік цієї схеми полягає в умовній стійкості розв'язку (при певних співвідношеннях між $\Delta\tau$ і h схема (3.6) може давати пилоподібний профіль температур).

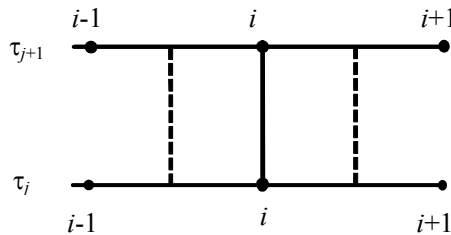


Рис. 3.2. Сітковий шаблон явно-неявної шеститочнової схеми

Якщо $c_p, \rho, \lambda \neq f(t)$ і, використовуючи рівномірний шаблон, то із (3.5), (3.6) нескладно отримати наступну різницеву схему

$$c_p \rho \frac{\hat{t}_i - t_i}{\Delta \tau} = \frac{\lambda}{h^2} (\hat{t}_{i+1} - 2\hat{t}_i + \hat{t}_{i-1}) + \hat{q}_{vi}, \quad 2 \leq i \leq n-1, \quad (3.7)$$

або, якщо прийняти, що $a = \frac{\lambda}{c_p \rho}$, то (3.7) буде мати вигляд

$$\frac{\hat{t}_i - t_i}{\Delta \tau} = \frac{a}{h^2} (\hat{t}_{i+1} - 2\hat{t}_i + \hat{t}_{i-1}) + \frac{\hat{q}_{vi}}{c_p \rho} - \text{треточкова чисто неявна схема};$$

$$\frac{\hat{t}_i - t_i}{\Delta \tau} = \frac{a}{2h^2} (\hat{t}_{i+1} - 2\hat{t}_i + \hat{t}_{i-1} + t_{i+1} - 2t_i + t_{i-1}) + \frac{\hat{q}_{vi} + q_{vi}}{2c_p \rho} - \text{шеститочкова явно-}$$

неявна схема.

Для визначення \hat{t}_i – на кожному кроці інтегрування за часом необхідно розв'язувати систему лінійних алгебричних рівнянь.

Використовуючи треточковий сітковий шаблон з рівномірним кроком по координаті виду (рис. 3.3), нескладно отримати чисто явну схему за допомогою 1-го методу побудови різницевих схем

$$\frac{\hat{t}_i - t_i}{\Delta \tau} = \frac{a}{h^2} (t_{i+1} - 2t_i + t_{i-1}) + \frac{q_{vi}}{c_p \rho}; \quad (3.8)$$

Звідки \hat{t}_i визначається з простої формули

$$\hat{t}_i = t_i + \frac{a \Delta \tau}{h^2} (t_{i+1} - 2t_i + t_{i-1}) + q_{vi} \frac{\Delta \tau}{c_p \rho}. \quad (3.9)$$

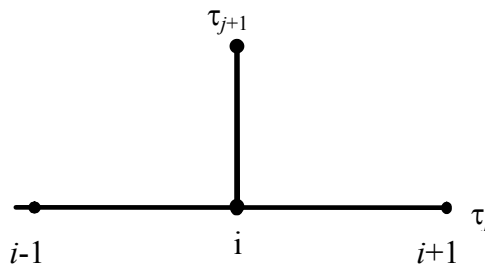


Рис. 3.3. Сітковий шаблон явної треточкової схеми

3.1.2. Стійкість різницевих схем

Різницеві схеми можна підрозділити на стійкі та умовно стійкі. Неявні схеми (3.5), (3.7) є абсолютно стійкими, тобто їх збіжність не залежить від кроку інтегрування за часом та за координатою.

Схема (3.8) є умовно стійкою, тому що стійкий розв'язок з її використанням можна отримати тільки при виконанні умови $\Delta\tau \leq h^2/(2a)$ (умова Куранта). Схема (3.6) також є умовно стійкою, тому що при певних значеннях $\Delta\tau$ і h може давати пилоподібний профіль температур (більш детально буде аналізуватися нижче за текстом).

3.1.3. МСР – основні визначення і порядок побудови різницевих схем

1) Дискретизація це розбиття розрахункової області на інтервали по координаті й часу, тобто побудова просторово-часової різницевої сітки (сіткового шаблону). Ці інтервали називаються кроком інтегрування за координатою й часом вихідного диференціального рівняння в частинних похідних. Границі між інтервалами позначаються точками, які називаються вузлами. Різницеві сітки можуть бути:

- рівномірними, тобто з постійними інтервалами інтегрування по $\Delta\tau$ і h ;
- нерівномірними.

2) У вузлових точках задається або визначається дискретна функція (наприклад, температура), яка називається сітковою функцією. Результатом побудови різницевої сітки є перехід від функції неперервного аргументу до функції дискретного аргументу – сіткової функції.

3) Частина різницевої сітки, для якої записуються різницеві аналоги похідних для конкретного вузла, називається сітковим шаблоном. Сітковий шаблон визначає тип різницевої схеми: явна, неявна, явно-неявна.

4) Відповідно до вибраного сіткового шаблону записується або будується скінченно-різницевий аналог вихідного диференціального рівняння.

3.1.4. Сімейство явно-неявних схем для однорідного нестационарного рівняння теплопровідності. Метод прогонки

У літературі параметр σ використовується для описання сімейства явно-неявних різницевих схем [26], наприклад, на 6-ти точковому шаблоні маємо

$$\frac{t_i^{k+1} - t_i^k}{\Delta\tau} = a\sigma \frac{t_{i+1}^{k+1} - 2t_i^{k+1} + t_{i-1}^{k+1}}{h^2} + a(1-\sigma) \frac{t_{i+1}^k - 2t_i^k + t_{i-1}^k}{h^2} + O(h^2 + \Delta\tau), \quad (3.10)$$

$$i=2,3,\dots,n-1; k=0,1,\dots,m.$$

При $\sigma=0$ – чисто явна схема, при $\sigma=1$ – чисто неявна схема і при $\sigma=1/2$ – явно-неявна схема або схема з півсумою, або симетрична (схема Кранка-Ніколсона [11] – умовно стійка). Умови стійкості (3.10)

$$\Delta\tau \leq \frac{h^2}{2a(1-\sigma)}. \quad (3.11)$$

Неявна схема: при $\sigma=1$ із (3.10) отримуємо чисто неявну схему на чотириточковому сітковому шаблоні (рис. 3.4). Ця схема абсолютно стійка, тобто $\Delta\tau \rightarrow \infty$.

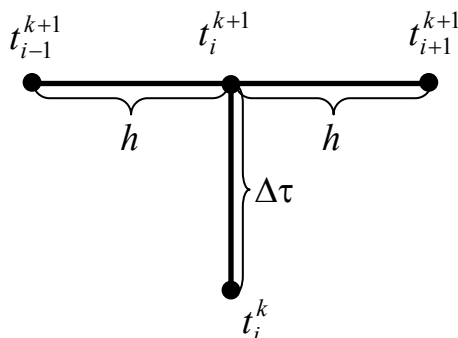


Рис.3.4. Сітковий шаблон

$$\frac{t_i^{k+1} - t_i^k}{\Delta\tau} = a \frac{t_{i+1}^{k+1} - 2t_i^{k+1} + t_{i-1}^{k+1}}{h^2} + O(h^2 + \Delta\tau), \quad (3.12)$$

$i=2, \dots, n-1; k=0, 1, \dots, m.$

Для розрахунку на кожному часовому рівні розподілу температур по схемі (3.12) необхідно розв'язувати систему лінійних алгебричних рівнянь. Неявна схема (3.12), на відміну від явної схеми ($\sigma=0$), є абсолютно стійкою, тобто не накладає обмежень на крок інтегрування за часом. Це витікає із умови (3.11).

Різницєва схема (3.12) приводить до тридіагональної матриці (рис. 3.5).

СЛАР типу (3.12) розв'язується за допомогою економічного методу прогонки [12] (див. п. 2.2).

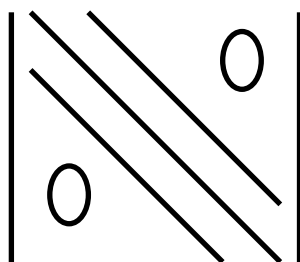


Рис. 3.5. Схема тридіагональної матриці СЛАР (3.12)

Запишемо в загальному виді систему триточкових лінійних рівнянь для сіткової функції t

$$\begin{cases} -C_2 t_2^{k+1} + B_2 t_3^{k+1} & = -F_2 \\ A_i t_{i-1}^{k+1} - C_i t_i^{k+1} + B_i t_{i+1}^{k+1} & = -F_i, 3 \leq i \leq n-2, \\ A_{n-1} t_{n-2}^{k+1} - C_{n-1} t_{n-1}^{k+1} & = -F_{n-1} \end{cases} \quad (3.13)$$

де n – кількість вузлів по координаті.

Умови стійкості (3.13):

$$A_i > 0, B_i > 0, C_i \geq A_i + B_i, \quad 2 \leq i \leq n-1.$$

Значення коефіцієнтів, що входять у (3.13), з врахуванням (3.12) при граничних умовах I роду такі:

$$B_i = \frac{a}{h^2}, \quad i = 2, \dots, n-2;$$

$$C_i = \frac{1}{\Delta\tau} + \frac{2a}{h^2}, \quad i = 2, \dots, n-1;$$

$$A_i = \frac{a}{h^2}, \quad i = 3, \dots, n-1;$$

$$F_2 = \frac{t_2^k}{\Delta\tau} + a \frac{t_1^{k+1}}{h^2}; F_i = \frac{t_i^k}{\Delta\tau}, \quad i = 3, \dots, n-2; F_{n-1} = \frac{t_{n-1}^k}{\Delta\tau} + a \frac{t_n^{k+1}}{h^2}$$

Прямий хід прогонки:

$$\alpha_3 = \frac{B_2}{C_2}, \quad \beta_3 = \frac{F_2}{C_2}, \quad (3.14)$$

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - A_i \alpha_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{A_i \beta_i + F_i}{C_i - A_i \alpha_i}, \quad i = 3, 4, \dots, n-1. \quad (3.15)$$

Зворотний хід прогонки (рекурентна формула):

$$t_{n-1}^{k+1} = \beta_n, \quad t_i^{k+1} = \alpha_{i+1} t_{i+1}^{k+1} + \beta_{i+1}, \quad i = n-2, n-3, \dots, 2. \quad (3.16)$$

Кількість арифметичних операцій у методі прогонки

$$Q = N + 1, \quad N = n - 2.$$

Для порівняння в методі послідовного виключення Гауса

$$Q \approx \frac{2}{3} N^3.$$

Приклад використання явної (3.9) та неявної (3.12)–(3.16) схем розв'язання одновимірних рівнянь теплопровідності приведено у файлах *mkp_shema1.xmcd*, *mkp_shema2.xmcd* для системи Mathcad, відповідно.

3.2. Методи розв'язання двовимірного рівняння теплопровідності

Двовимірне рівняння теплопровідності має вигляд

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right), \quad \tau > 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (3.17)$$

де t – температура, °C; τ – час, с; a – температуропровідність, м²/с; x, y – координати, м; Ω – розрахункова область.

Початкові умови

$$t|_{\Omega} = f(x, y). \quad (3.18)$$

Граничні умови – I-го роду

$$t|_{\Gamma} = \varphi(x, y), \quad (3.19)$$

де Γ – границя Ω .

3.2.1. Явний метод

Розглянемо сітковий шаблон, який показано на рис. 3.6. Явна схема для (3.17) має вид (відповідно до сіткового шаблону – рис. 3.6)

$$\frac{t_{ij}^{k+1} - t_{ij}^k}{\Delta \tau} = a \left[\frac{t_{i+1j}^k - 2t_{ij}^k + t_{i-1j}^k}{h_x^2} + \frac{t_{ij+1}^k - 2t_{ij}^k + t_{ij-1}^k}{h_y^2} \right], \quad 2 \leq i \leq n-1, 2 \leq j \leq m-1, \quad (3.20)$$

де $\Delta \tau$ – крок інтегрування за часом, с; h_x, h_y – кроки інтегрування по координатах x, y , відповідно; n, m – кількість вузлів по координатах x, y , відповідно.

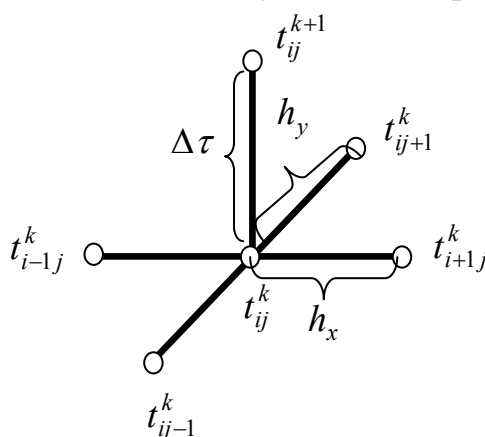


Рис. 3.6. Сітковий шаблон явної схеми

Умови стійкості (3.20)

$$a\Delta\tau \left[\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right] \leq \frac{1}{2}.$$

Розрахунок поля температури по схемі (3.20) виконується з використанням простої формули

$$t_{ij}^{k+1} = t_{ij}^k + a\Delta\tau \left[\frac{t_{i+1j}^k - 2t_{ij}^k + t_{i-1j}^k}{h_x^2} + \frac{t_{ij+1}^k - 2t_{ij}^k + t_{ij-1}^k}{h_y^2} \right], 2 \leq i \leq n-1, 2 \leq j \leq m-1.$$

3.2.2. Неявний метод

Розглянемо сітковий шаблон неявної схеми, який показано на рис. 3.7.

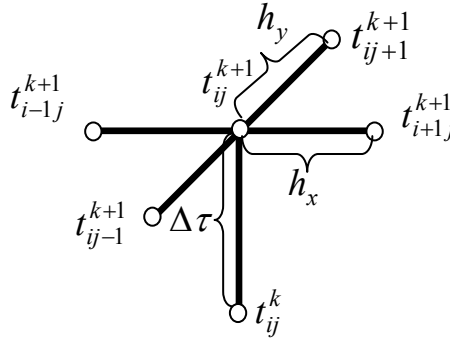


Рис. 3.7. Сітковий шаблон неявної схеми

Неявна схема для (3.17) має вигляд (відповідно до сіткового шаблону – рис. 3.7):

$$\frac{t_{ij}^{k+1} - t_{ij}^k}{\Delta\tau} = a \left[\frac{t_{i+1j}^{k+1} - 2t_{ij}^{k+1} + t_{i-1j}^{k+1}}{h_x^2} + \frac{t_{ij+1}^{k+1} - 2t_{ij}^{k+1} + t_{ij-1}^{k+1}}{h_y^2} \right], 2 \leq i \leq n-1, 2 \leq j \leq m-1 \quad (3.21)$$

$$\text{або } \frac{t_{ij}^{k+1} - t_{ij}^k}{\Delta\tau} = a \left[\hat{\delta}_x^2 t_{ij}^{k+1} + \hat{\delta}_y^2 t_{ij}^{k+1} \right], 2 \leq i \leq n-1, 2 \leq j \leq m-1, \quad (3.22)$$

де

$$\hat{\delta}_x^2 t_{ij}^{k+1} = \frac{t_{i+1j}^{k+1} - 2t_{ij}^{k+1} + t_{i-1j}^{k+1}}{h_x^2}, \quad \hat{\delta}_y^2 t_{ij}^{k+1} = \frac{t_{ij+1}^{k+1} - 2t_{ij}^{k+1} + t_{ij-1}^{k+1}}{h_y^2}.$$

Схема (3.22) є абсолютно стійкою. Матриця системи лінійних алгебричних рівнянь (3.21) має п'ять діагоналей відмінних від нуля (рис. 3.8).

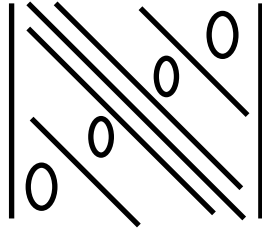


Рис. 3.8. Схема 5-ти діагональної матриці СЛАР (3.21)

Для розв'язання системи (3.21) метод звичайної прогонки для тридіагональної матриці не придатний (див. п. 3.1). Тому для розв'язання СЛАР виду (3.21) застосовуються будь-які прямі або ітераційні методи. Ефективність таких підходів невелика.

Для більш ефективного розв'язання систем (3.21), (3.22) застосовуються різноманітні варіанти методів розщеплення. Розглянемо два із найбільш часто використовуваних методів.

3.2.3. Неявний метод змінних напрямків

Цей метод складається з двох кроків для системи типу (3.22). Крок 1 – прогонка по координаті x

$$\frac{t_{ij}^{k+1/2} - t_{ij}^k}{\Delta\tau/2} = a \left[\hat{\delta}_x^2 t_{ij}^{k+1/2} + \delta_y^2 t_{ij}^k \right]. \quad (3.23)$$

Крок 2 – прогонка по координаті y

$$\frac{t_{ij}^{k+1} - t_{ij}^{k+1/2}}{\Delta\tau/2} = a \left[\delta_x^2 t_{ij}^{k+1/2} + \hat{\delta}_y^2 t_{ij}^{k+1} \right]. \quad (3.24)$$

Схема розщеплення (3.23), (3.24) є абсолютно стійкою. У літературі ця схема отримала назву як схема Пісьмена-Рекфорда або повздовжньо-поперечна схема.

Для розв'язання систем рівнянь (3.23), (3.24) по кожній координаті застосовується економічний метод прогонки (див. п. 3.1). Проміжні розв'язки за цією схемою $t_{ij}^{k+1/2}$ при $\Delta\tau/2$ мають фізичний зміст.

До основного недоліку повздовжньо-поперечної схеми можна віднести неможливість її застосування для розв'язання тривимірних задач.

3.2.4. Методи дробових кроків

Ці методи мають стільки кроків скільки ступенів свободи має задача (тобто її розмірність).

Крок 1 – прогонка по координаті x

$$\frac{t_{ij}^{k+1/2} - t_{ij}^k}{\Delta\tau} = a\hat{\delta}_x^2 t_{ij}^{k+1/2} . \quad (3.25)$$

Крок 2 – прогонка по координаті у

$$\frac{t_{ij}^{k+1} - t_{ij}^{k+1/2}}{\Delta\tau} = a\hat{\delta}_y^2 t_{ij}^{k+1} . \quad (3.26)$$

Для розв'язання систем (3.25), (3.26) по кожній координаті також застосовується економічний метод прогонки. Проміжний розв'язок цієї схеми (3.25) $t_{ij}^{k+1/2}$ не має фізичного змісту. Схема (3.25), (3.26) є абсолютно стійкою.

У літературі ця схема отримала назву як локально-одновимірна схема (ЛОС).

Схема ЛОС застосовується також для розв'язання тривимірних задач.

Приклад використання явної (3.20) схеми розв'язання двовимірного рівняння теплопровідності приведено у файлі *mkr_shema1_2D.xmcd* для системи Mathcad.

Запитання для самоконтролю

1. Назвіть основні методи побудови різницевих схем?
2. Що таке сітковий шаблон і як він визначає сімейство явно-неявних схем для нестационарного рівняння теплопровідності?
3. Основні визначення і порядок побудови різницевих схем.
4. У чому полягають основні переваги прогонки порівняно з методом виключення Гауса?
5. Що Ви можете розказати про стійкість різницевих схем?
6. Назвіть методи розв'язання двовимірного рівняння теплопровідності на основі МСР.
7. Чому явна схема не потребує розв'язання системи лінійних рівнянь?
8. Умови стійкості явної схеми.
9. Чому для розв'язання багатовимірних рівнянь теплопровідності застосовуються методи розщеплення?
10. У чому основна відмінність між методом змінних напрямків і методом дробових кроків? Яку ще назву мають ці методи?
11. Що таке сумарна апроксимація? Який порядок апроксимації за часом мають схеми розщеплення?

4. МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

4.1. Рівняння методу скінченних елементів. Задачі теорії поля

Розглянемо тривимірне стаціонарне рівняння потенціалу з внутрішнім джерелом теплоти виду

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_{xx} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_{yy} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_{zz} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + q_v = 0 \quad (4.1)$$

з граничними умовами

$$\varphi = \varphi_B \text{ на } S_1 \quad (4.2)$$

і (або)

$$\lambda_{xx} \frac{\partial \varphi}{\partial x} n_x + \lambda_{yy} \frac{\partial \varphi}{\partial y} n_y + \lambda_{zz} \frac{\partial \varphi}{\partial z} n_z + q + \alpha(\varphi - \varphi_\infty) = 0 \text{ на } S_2. \quad (4.3)$$

Об'єднання $S_1 \cup S_2$ утворює повну границю тіла. Коефіцієнти $(\lambda_{xx}, \lambda_{yy}, \lambda_{zz})$ і величина q можуть бути функціями $X(x, y, z) \in R^3$, але незалежними від φ . Величини (n_x, n_y, n_z) направляючі косинуси вектора зовнішньої нормалі до границі тіла.

Рівняння (4.1) разом з ГУ описує розповсюдження теплоти у тривимірній області. При цьому $(\lambda_{xx}, \lambda_{yy}, \lambda_{zz})$ – коефіцієнти теплопровідності, φ – температура, q – густина теплового потоку, α – коефіцієнт тепловіддачі.

При заданні адіабатних умов на S_2 ГУ (4.3) приймають вид

$$\lambda_{xx} \frac{\partial \varphi}{\partial x} n_x + \lambda_{yy} \frac{\partial \varphi}{\partial y} n_y + \lambda_{zz} \frac{\partial \varphi}{\partial z} n_z = 0 \text{ на } S_2. \quad (4.4)$$

Далі розглянемо двовимірне рівняння, коли $\lambda_{xx} = \lambda_{yy} = 1$, $q_v = 2G\theta$ і $\varphi_B = 0$. У цьому випадку (4.1) зводиться до рівняння Пуассона

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + 2G\theta = 0, \quad (4.5)$$

яке зустрічається в задачі про кручення пружного стрижня не круглого сечення. Польова функція φ тепер є функцією напружень, G – пружна характеристика матеріалу, θ – кут закручення стрижня. При цьому напруження зсуву, які спричинені зовнішнім крутним зусиллям, отримуються диференціюванням φ по x і y .

Другою важливою фізичною задачею є задача про безвихрову течію рідини. У цьому випадку $\lambda_{xx} = \lambda_{yy} = 1$, $q_v = 0$ і рівняння набуває вид рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{— для двовимірного випадку} \quad (4.6)$$

$$\text{з ГУ} \quad \varphi = \varphi_B \quad \text{і} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} n_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} n_y = 0.$$

Диференціальне рівняння для обмеженого потоку ґрунтової води також може бути описано рівнянням подібним до (4.1). У цьому випадку маємо

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_{xx} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_{yy} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + q_v = 0 \quad (4.7)$$

граничними умовами $\varphi = \varphi_B$ і $\lambda_{xx} \frac{\partial \varphi}{\partial x} n_x + \lambda_{yy} \frac{\partial \varphi}{\partial y} n_y + q = 0$. Коефіцієнти $(\lambda_{xx}, \lambda_{yy})$ визначають проникність ґрунту, q_v — джерело (стік) води, а польова функція φ — п'єзометричний напір. Величина q — визначає воду, що просочується крізь водоносний шар вздовж частини його границі.

Інші важливі фізичні задачі, які описуються рівнянням (4.1), пов'язані з розгляданням електростатичного та магнітостатичного полів, а також рідких плівок для змащування.

З варіаційної точки зору розв'язання задачі (4.1)–(4.3) еквівалентне знаходженню мінімуму функціонала

$$\chi = \int_V \frac{1}{2} \left[\lambda_{xx} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \lambda_{yy} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \lambda_{zz} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 - 2q_v \varphi \right] dV + \int_S \left[q\varphi + \frac{\alpha}{2} (\varphi - \varphi_\infty)^2 \right] dS, \quad (4.8)$$

де V — об'єм; S — площа поверхні.

Мінімізація функціонала (4.8) повинна бути здійснена на множині вузлових значень потенціалу $\{\Phi\}$. Для цієї мети, будемо мінімізувати (4.8) перед обчисленням інтегралів. Такий підхід дозволяє вибрати найбільш прийнятні характеристики елементів для кожної конкретної задачі.

Почнемо процес перетворення функціонала (4.8), що дозволяє спростити подальші операції. Введемо дві матриці (градієнта й теплопровідності):

$$\{g\}^T = \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right\}, \quad (4.9)$$

$$\text{або} \quad \{g\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{Bmatrix},$$

i

$$[D] = \begin{bmatrix} \lambda_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{zz} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

З врахуванням (4.9), (4.10) співвідношення (4.8) тепер може бути переписане у виді

$$\chi = \int_V \frac{1}{2} [\{g\}^T [D] \{g\} - 2\varphi q_V] dV + \int_{S1} \varphi q dS + \int_{S2} \frac{\alpha}{2} (\varphi^2 - 2\varphi\varphi_\infty + \varphi_\infty^2) dS. \quad (4.11)$$

Виконаємо заміни в (4.11). Замість неперервної функції φ введемо дискретну – $\varphi^{(e)}$, яка визначена для кожного окремого елемента. Інтеграли (4.11) розіб'ємо на інтеграли для кожного окремого елемента, що в результаті дасть

$$\begin{aligned} \chi = \sum_{e=1}^E \int_{V(e)} \frac{1}{2} \{g^{(e)}\}^T [D^{(e)}] \{g^{(e)}\} dV - \int_{V(e)} \varphi^{(e)} q_V^{(e)} dV + \int_{S1^{(e)}} \varphi^{(e)} q^{(e)} dS + \\ + \int_{S2^{(e)}} \frac{\alpha^{(e)}}{2} (\varphi^{(e)} \varphi^{(e)} - 2\varphi^{(e)} \varphi_\infty + \varphi_\infty^2) dS, \end{aligned} \quad (4.12)$$

де E – кількість елементів у області.

Останній вираз може бути записано у вигляді

$$\chi = \chi^{(1)} + \chi^{(2)} + \dots + \chi^{(E)} = \sum_{e=1}^E \chi^{(e)}, \quad (4.13)$$

де $\chi^{(e)}$ – вклад окремого елемента розрахункової області в χ .

Мінімізація функціонала χ потребує виконання співвідношення

$$\frac{\partial \chi}{\partial \{\Phi\}} = \frac{\partial}{\partial \{\Phi\}} \sum_{e=1}^E \chi^{(e)} = \sum_{e=1}^E \frac{\partial \chi^{(e)}}{\partial \{\Phi\}}. \quad (4.14)$$

Частинні похідні $\frac{\partial \chi^{(e)}}{\partial \{\Phi\}}$ у (4.14) не можуть бути визначені поки інтеграли у (4.12) не будуть виражені через вузлові значення.

Враховуючи співвідношення, яке визначає потенціал у будь-якій точці елемента через функції форми елемента та вузлові значення потенціалу

$$\varphi^{(e)} = [N^{(e)}]\{\Phi\}, \quad (4.15)$$

можна обчислити матрицю градієнтів (4.9), яка разом з (4.15) може бути підставлена в (4.12).

Запишемо вираз для $\{g^{(e)}\}$:

$$\{g^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi^{(e)}}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi^{(e)}}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi^{(e)}}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_p^{(e)}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_p^{(e)}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial z} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial z} & \dots & \frac{\partial N_p^{(e)}}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \vdots \\ \Phi_p \end{Bmatrix} \quad (4.16)$$

або

$$\{g^{(e)}\} = [B^{(e)}]\{\Phi\}, \quad (4.17)$$

$$\text{або } \{g^{(e)}\}^T = \{\Phi\}^T [B^{(e)}]^T$$

$$\text{де } [B^{(e)}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_p^{(e)}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_p^{(e)}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial z} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial z} & \dots & \frac{\partial N_p^{(e)}}{\partial z} \end{bmatrix} \text{ – матриця, яка містить інформацію про функції форми (інтерполяційні функції), } p \text{ – кількість вузлів у елементі.}$$

Ці похідні поки невідомі, тому що функції форми не визначені.

Використання (4.15) і (4.17) дозволяє переписати (4.12) відносно елементів у вигляді

$$\begin{aligned}\chi^{(e)} = & \int_{V(e)} \frac{1}{2} \{\Phi\}^T [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] \{\Phi\} dV - \int_{V(e)} q_V^{(e)} [N^{(e)}] \{\Phi\} dV + \\ & + \int_{S1^{(e)}} q^{(e)} [N^{(e)}] \{\Phi\} dS + \int_{S2^{(e)}} \frac{\alpha^{(e)}}{2} \{\Phi\}^T [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] \{\Phi\} dS - \\ & - \int_{S2^{(e)}} \alpha^{(e)} \varphi_\infty [N^{(e)}] \{\Phi\} dS + \int_{S2^{(e)}} \frac{\alpha^{(e)}}{2} \varphi_\infty^2 dS\end{aligned}\quad (4.18)$$

Величини q_V , q , α і φ_∞ відомі коефіцієнти. Вони внесені під знак інтеграла, тому що можуть змінюватися усередині елемента. Диференціювання (4.18) по $\{\Phi\}$ представляє собою цілковито просту операцію, якщо користуватися правилами матричного диференціювання

$$\frac{\partial}{\partial \{\Phi\}} (\{\Phi\}^T [A] \{\Phi\}) = 2[A] \{\Phi\}.$$

Розглянемо формулу (4.18):

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \{\Phi\}} \int_{V(e)} \frac{1}{2} \{\Phi\}^T [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] \{\Phi\} dV &= \int_{V(e)} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] \{\Phi\} dV, \\ \frac{\partial}{\partial \{\Phi\}} \int_{V(e)} q_V^{(e)} [N^{(e)}] \{\Phi\} dV &= \int_{V(e)} q_V^{(e)} [N^{(e)}]^T dV, \\ \frac{\partial}{\partial \{\Phi\}} \int_{S1^{(e)}} q^{(e)} [N^{(e)}] \{\Phi\} dS &= \int_{S1^{(e)}} q^{(e)} [N^{(e)}]^T dS, \\ \frac{\partial}{\partial \{\Phi\}} \int_{S2^{(e)}} \frac{\alpha^{(e)}}{2} \{\Phi\}^T [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] \{\Phi\} dS &= \int_{S2^{(e)}} \alpha^{(e)} [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] \{\Phi\} dS, \\ \frac{\partial}{\partial \{\Phi\}} \int_{S2^{(e)}} \alpha^{(e)} \varphi_\infty [N^{(e)}] \{\Phi\} dS &= \int_{S2^{(e)}} \alpha^{(e)} \varphi_\infty [N^{(e)}]^T dS, \\ \frac{\partial}{\partial \{\Phi\}} \int_{S2^{(e)}} \frac{\alpha^{(e)}}{2} \varphi_\infty^2 dS &= 0.\end{aligned}\quad (4.19)$$

Вклад окремого елемента $\frac{\partial \chi^{(e)}}{\partial \{\Phi\}}$ у загальну суму $\frac{\partial}{\partial \{\Phi\}}$ дорівнює

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \chi^{(e)}}{\partial \{\Phi\}} = & \left(\int_{V(e)} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] dV + \right. \\
& \left. + \int_{S2^{(e)}} \alpha^{(e)} [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] dS \right) \{\Phi\} - \int_{V(e)} q_V^{(e)} [N^{(e)}]^T dV + \\
& + \int_{S1^{(e)}} q^{(e)} [N^{(e)}]^T dS - \int_{S2^{(e)}} \alpha^{(e)} \varphi_\infty [N^{(e)}]^T dS.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Приведена сукупність інтегралів може бути також записана в компактній формі

$$\frac{\partial \chi^{(e)}}{\partial \{\Phi\}} = [k^{(e)}] \{\Phi\} + \{f^{(e)}\}, \tag{4.21}$$

де

$$[k^{(e)}] = \int_{V(e)} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] dV + \int_{S2^{(e)}} \alpha^{(e)} [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] dS, \tag{4.22}$$

і

$$\{f^{(e)}\} = - \int_{V(e)} q_V^{(e)} [N^{(e)}]^T dV + \int_{S1^{(e)}} q^{(e)} [N^{(e)}]^T dS - \int_{S2^{(e)}} \alpha^{(e)} \varphi_\infty [N^{(e)}]^T dS. \tag{4.23}$$

Остаточно вид системи рівнянь, який отримується після підстановки (4.21) у (4.14), буде мати вид:

$$\frac{\partial \chi}{\partial \{\Phi\}} = \sum_{e=1}^E ([k^{(e)}] \{\Phi\} + \{f^{(e)}\}) = 0 \tag{4.24}$$

$$\text{або } [\mathbf{K}] \{\Phi\} = \{\mathbf{F}\}, \tag{4.25}$$

$$\text{де } [\mathbf{K}] = \sum_{e=1}^E [k^{(e)}] \tag{4.26}$$

$$\text{і } \{\mathbf{F}\} = - \sum_{e=1}^E \{f^{(e)}\}. \tag{4.27}$$

Інтеграли в (4.22) визначають матрицю теплопровідності елемента $[k^{(e)}]$, а інтеграли в (4.23) вектор навантаження елемента $\{f^{(e)}\}$. Ці інтеграли представляють основні результати цього пункту. Процедура визначення цих інтегралів буде детально обговорюватися далі.

4.2. Двовимірний симплекс-елемент

Двовимірний симплекс-елемент приведено на рис. 4.1.

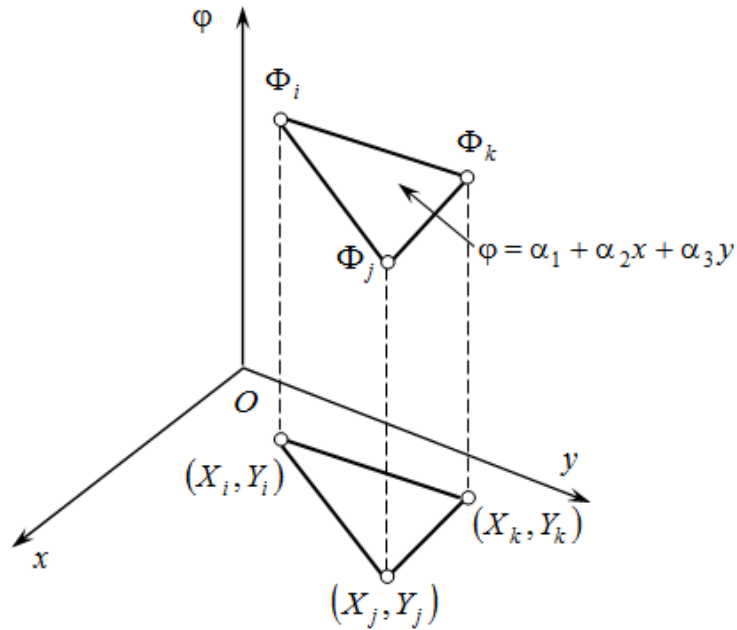


Рис. 4.1. Двовимірний симплекс-елемент

Двовимірний симплекс-елемент є трикутником з прямолінійними сторонами і трьома вузлами, по одному в кожній вершині. Потрібно задати логічну нумерацію вузлів. На практиці використовується послідовна нумерація вузлів проти годинникової стрілки, починаючи з деякого i -го вузла, який вибирається довільно. Вузлові значення скалярної величини ϕ позначаються через Φ_1, Φ_2, Φ_3 , а координатні пари – через $(X_i, Y_i), (X_j, Y_j), (X_k, Y_k)$.

Інтерполяційний поліном має вид

$$\phi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y. \quad (4.28)$$

У вузлах виконуються наступні умови:

$$\begin{aligned} \phi &= \Phi_1 && \text{при } x = X_i, \quad y = Y_i; \\ \phi &= \Phi_2 && \text{при } x = X_j, \quad y = Y_j; \\ \phi &= \Phi_3 && \text{при } x = X_k, \quad y = Y_k. \end{aligned}$$

Підстановка цих умов у формулу (4.28) приводить до системи рівнянь

$$\begin{cases} \Phi_1 = \alpha_1 + \alpha_2 X_i + \alpha_3 Y_i; \\ \Phi_2 = \alpha_1 + \alpha_2 X_j + \alpha_3 Y_j; \\ \Phi_3 = \alpha_1 + \alpha_2 X_k + \alpha_3 Y_k. \end{cases} \quad (4.29)$$

розв'язуючи яку отримуємо:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{1}{2A} [(X_j Y_k - X_k Y_j) \Phi_i + (X_k Y_i - X_i Y_k) \Phi_j + (X_i Y_j - X_j Y_i) \Phi_k], \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2A} [(Y_j - Y_k) \Phi_i + (Y_k - Y_i) \Phi_j + (Y_i - Y_j) \Phi_k], \\ \alpha_3 &= \frac{1}{2A} [(X_k - X_j) \Phi_i + (X_i - X_k) \Phi_j + (X_j - X_i) \Phi_k].\end{aligned}$$

Визначник системи пов'язаний з площею трикутника A співвідношенням

$$\begin{vmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{vmatrix} = 2A = X_j Y_k + X_i Y_j + X_k Y_i - X_j Y_i - X_k Y_j - X_i Y_k. \quad (4.30)$$

Підставляючи значення $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ у (4.28) його можна перетворити

$$\varphi = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j + N_k \Phi_k, \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned}\text{де } N_i &= \frac{1}{2A} [a_i + b_i x + c_i y] \text{ і } \begin{cases} a_i = X_j Y_k - X_k Y_j \\ b_i = Y_j - Y_k \\ c_i = X_k - X_j \end{cases}, \\ N_j &= \frac{1}{2A} [a_j + b_j x + c_j y] \text{ і } \begin{cases} a_j = X_k Y_i - X_i Y_k \\ b_j = Y_k - Y_i \\ c_j = X_i - X_k \end{cases}, \\ N_k &= \frac{1}{2A} [a_k + b_k x + c_k y] \text{ і } \begin{cases} a_k = X_i Y_j - X_j Y_i \\ b_k = Y_i - Y_j \\ c_k = X_j - X_i \end{cases}.\end{aligned}$$

Співвідношення, що визначає елемент, вміщує три функції форми, по одній для кожного вузла.

Розглянемо детальніше отримані формули (4.31).

$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$ після підстановки $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ маємо

$$\begin{aligned}\varphi = & \frac{1}{2A} [(X_j Y_k - X_k Y_j) \Phi_i + (X_k Y_i - X_i Y_k) \Phi_j + (X_i Y_j - X_j Y_i) \Phi_k] + \\ & + \frac{1}{2A} [(Y_j - Y_k) \Phi_i + (Y_k - Y_i) \Phi_j + (Y_i - Y_j) \Phi_k] x + \\ & + \frac{1}{2A} [(X_k - X_j) \Phi_i + (X_i - X_k) \Phi_j + (X_j - X_i) \Phi_k] y.\end{aligned}$$

Згрупувавши члени при Φ_i, Φ_j, Φ_k , отримаємо:

$$\begin{aligned}\varphi = & \frac{1}{2A} [(X_j Y_k - X_k Y_j) \Phi_i + (Y_j - Y_k) \Phi_i x + (X_k - X_j) \Phi_i y] + \\ & + \frac{1}{2A} [(X_k Y_i - X_i Y_k) \Phi_j + (Y_k - Y_i) \Phi_j x + (X_i - X_k) \Phi_j y] + \Leftrightarrow \\ & + \frac{1}{2A} [(X_i Y_j - X_j Y_i) \Phi_k + (Y_i - Y_j) \Phi_k x + (X_j - X_i) \Phi_k y] \\ \varphi = & \frac{1}{2A} [(X_j Y_k - X_k Y_j) + (Y_j - Y_k) x + (X_k - X_j) y] \Phi_i + \\ \Leftrightarrow & + \frac{1}{2A} [(X_k Y_i - X_i Y_k) + (Y_k - Y_i) x + (X_i - X_k) y] \Phi_j + \\ & + \frac{1}{2A} [(X_i Y_j - X_j Y_i) + (Y_i - Y_j) x + (X_j - X_i) y] \Phi_k.\end{aligned}$$

Обчислимо значення N_i в i -у вузлі

$$\begin{aligned}N_i = & \frac{1}{2A} [a_i + b_i x + c_i y] = \frac{1}{2A} [a_i + b_i X_i + c_i Y_i] = \\ = & \frac{1}{2A} [X_j Y_k - X_k Y_j + (Y_j - Y_k) X_i + (X_k - X_j) Y_i] = \\ = & \frac{1}{2A} [X_j Y_k - X_k Y_j + X_i Y_j - X_i Y_k + X_k Y_i - X_j Y_i]\end{aligned}$$

Вираз у дужках представляє собою визначник (4.30), тому у вузлі з номером i маємо

$$N_i = \frac{1}{2A} (2A) = 1.$$

Скалярна величина φ визначається всередині елемента функціями форми лінійними по x і y , отже градієнти цієї величини в напрямках x і y будуть постійними. Градієнт φ у напрямку x визначається співвідношенням

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \Phi_i + \frac{\partial N_j}{\partial x} \Phi_j + \frac{\partial N_k}{\partial x} \Phi_k, \quad (4.32)$$

то

$$\frac{\partial N_\beta}{\partial x} = \frac{1}{2A} b_\beta, \quad \beta = i, j, k, \text{ оскільки } [a + bx + cy]' = b.$$

Тому можна записати, що

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = b_i \Phi_i + b_j \Phi_j + b_k \Phi_k. \quad (4.33)$$

Тому що коефіцієнти b_i, b_j, b_k постійні (вони зафіксовані як тільки задані вузлові координати) і Φ_i, Φ_j, Φ_k не залежать від координат, то і частинна похідна по трикутнику (4.33) має постійне значення. *Постійність градієнта всередині кожного елемента означає, що необхідно використовувати дуже малі по величині елементи, щоб апроксимувати по координатах функцію φ , що швидко змінюється.*

Аналогічно маємо для градієнта φ у напрямку y

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = c_i \Phi_i + c_j \Phi_j + c_k \Phi_k. \quad (4.34)$$

Приклад 4.1. Необхідно отримати співвідношення, яке визначає елемент, і обчислити значення тиску в точці B з координатами $(2; 1.5)$, якщо задані вузлові значення $P_i = 40$; $P_j = 34$; $P_k = 46 \text{ Н/см}^2$ (рис. 4.2).

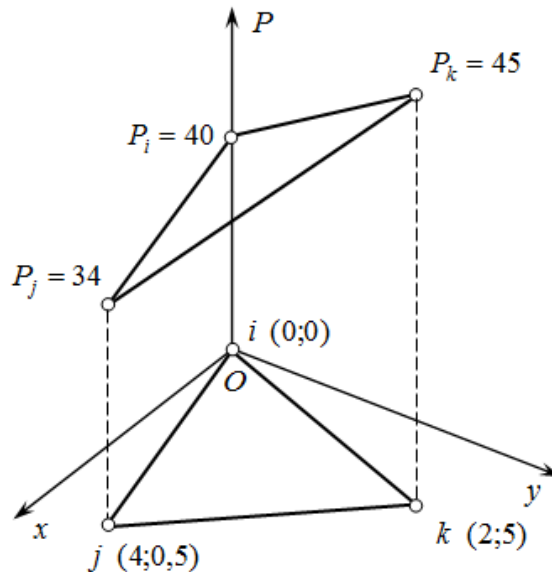


Рис. 4.2. Симплекс-елемент до прикладу 4.1

Тиск p всередині елемента визначається по формулі

$$p = N_i P_i + N_j P_j + N_k P_k,$$

$$\text{де } N_i = \frac{1}{2A} [a_i + b_i x + c_i y], \quad N_j = \frac{1}{2A} [a_j + b_j x + c_j y],$$

$$N_k = \frac{1}{2A} [a_k + b_k x + c_k y].$$

Підстановка значень координат у формулу (4.31) дає:

$$\begin{cases} a_i = X_j Y_k - X_k Y_j = 4 \times 5 - 2 \times \frac{1}{2} = 19; \\ b_i = Y_j - Y_k = \frac{1}{2} - 5 = -\frac{9}{2} = -4.5; \\ c_i = X_k - X_j = 2 - 4 = -2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_j = X_k Y_i - X_i Y_k = 2 \times 0 - 0 \times 5 = 0; \\ b_j = Y_k - Y_i = 5 - 0 = 5; \\ c_j = X_i - X_k = 0 - 2 = -2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_k = X_i Y_j - X_j Y_i = 0 \times \frac{1}{2} - 4 \times 0 = 0; \\ b_k = Y_i - Y_j = 0 - \frac{1}{2} = -0.5; \\ c_k = X_j - X_i = 4 - 0 = 4. \end{cases}$$

Подвійна площа трикутника

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 20 - 1 = 19.$$

Після підстановки значень коефіцієнтів форми, отримаємо

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{19} [(19 - 4.5x - 2y)P_i + (0 + 5x - 2y)P_j + (0 - 0.5x + 4y)P_k] = \\ &= \frac{1}{19} [(19 - 4.5 \times 2 - 2 \times 1.5)40 + (5 \times 2 - 2 \times 1.5)34 + (-0.5 \times 2 + 4 \times 1.5)46] = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{19} (7 \times 40 + 7 \times 34 + 5 \times 46) = 39,37 \text{ Н/см}^2.$$

Потрібно відзначити дві корисні властивості трикутного елемента. По-перше функція φ змінюється лінійно між двома будь-якими вузлами. Тому що вузли визначають границі елемента, φ змінюється лінійно вздовж кожної з трьох сторін. Звідси витікає друга корисна властивість: будь-яка лінія, вздовж якої φ приймає однакові значення, є пряма, що пересікає дві сторони елемента. Виключенням буде випадок, коли у всіх вузлах задані однакові значення φ . Приведені дві властивості дозволяють легко визначити лінії рівня скалярної величини.

Приклад 4.2. Необхідно визначити лінію рівня, що відповідає тиску 42 Н/см^2 , для трикутного елемента, який використано у прикладі 4.1 (рис. 4.3).

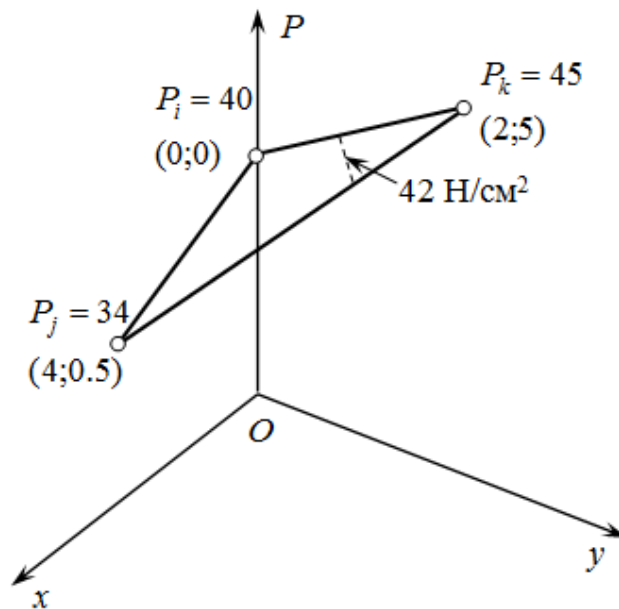


Рис. 4.3. Симплекс-елемент до прикладу 4.2

Шукана лінія рівня пересікає сторони ik і kj . Оскільки тиск змінюється лінійно по елементу, включаючи його три сторони, то можемо записати, наприклад, для сторони jk :

– для x на jk

$$\frac{P_k - p}{P_k - P_j} = \frac{X_k - x}{X_k - X_j} \Leftrightarrow \frac{46 - 42}{46 - 34} = \frac{2 - x}{2 - 4} \Rightarrow x = 2.67 \text{ см},$$

– для y на jk

$$\frac{P_k - p}{P_k - P_j} = \frac{Y_k - y}{Y_k - Y_j} \Leftrightarrow \frac{46 - 42}{46 - 34} = \frac{5 - y}{5 - 0.5} \Rightarrow y = 3.5 \text{ см.}$$

Аналогічно для x на ik

$$\frac{P_k - p}{P_k - P_i} = \frac{X_k - x}{X_k - X_i} \Leftrightarrow \frac{46 - 42}{46 - 40} = \frac{2 - x}{2 - 0} \Rightarrow x = \frac{2}{3} = 0.67 \text{ см.}$$

– для y на ik

$$\frac{P_k - p}{P_k - P_i} = \frac{Y_k - y}{Y_k - Y_i} \Leftrightarrow \frac{46 - 42}{46 - 40} = \frac{5 - y}{5 - 0} \Rightarrow y = \frac{5}{3} = 1.67 \text{ см.}$$

4.3. Тривимірний симплекс-елемент

Тривимірний симплекс-елемент представляє собою тетраедр. Чотири його вузла позначимо індексами i, j, k, l , причому обхід вузлів i, j, k у тому порядку як вони написані, здійснюється проти годинникової стрілки. Вузол l розташований у вершині, яка знаходиться поза площиною вузлів i, j, k . Тривимірний симплекс-елемент зображено на рис 4.4.

Інтерполяційний поліном для тетраедра має вид

$$\Phi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z. \quad (4.35)$$

Коефіцієнти $\alpha_n, n = \overline{1,4}$ можна визначити, використовуючи чотири умови у вузлах:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 X_i + \alpha_3 Y_i + \alpha_4 Z_i; \\ \Phi_2 &= \alpha_1 + \alpha_2 X_j + \alpha_3 Y_j + \alpha_4 Z_j; \\ \Phi_3 &= \alpha_1 + \alpha_2 X_k + \alpha_3 Y_k + \alpha_4 Z_k; \\ \Phi_4 &= \alpha_1 + \alpha_2 X_l + \alpha_3 Y_l + \alpha_4 Z_l. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Ця система рівнянь може бути розв'язана за допомогою правила Крамера. Така процедура, однак, потребує визначення п'яти визначників. Простіше всього провести ці обчислення чисельно. Систему рівнянь (4.36) запишемо в матричній формі

$$\{\Phi\} = [C]\{\alpha\}, \quad (4.37)$$

$$\text{де } \{\Phi\}^T = [\Phi_i \ \Phi_j \ \Phi_k \ \Phi_l], \quad (4.38)$$

$$\{\alpha\}^T = [\alpha_i \ \alpha_j \ \alpha_k \ \alpha_l],$$

i

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & X_i & Y_i & Z_i \\ 1 & X_j & Y_j & Z_j \\ 1 & X_k & Y_k & Z_k \\ 1 & X_l & Y_l & Z_l \end{bmatrix}. \quad (4.39)$$

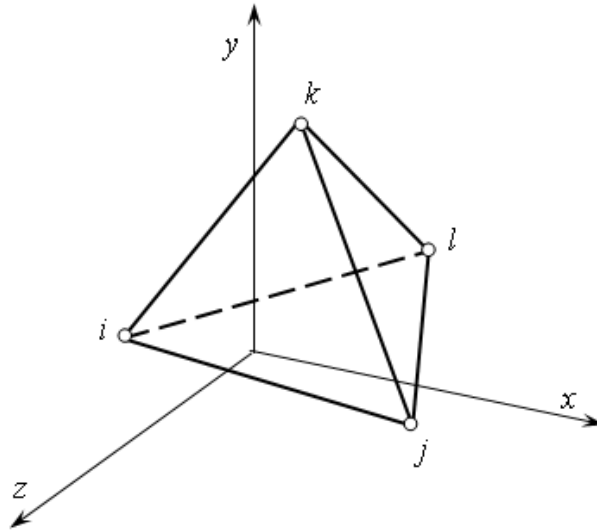


Рис. 4.4. Тривимірний симплекс-елемент

Рядок коефіцієнтів $\{\alpha\}$ може бути отримано за допомогою оберненої матриці $[C]^{-1}$

$$\{\alpha\} = [C]^{-1} \{\Phi\}. \quad (4.40)$$

Оскільки

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z = [1 \ x \ y \ z] \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix}, \quad (4.41)$$

то, використовуючи формулу (4.40), отримаємо

$$\varphi = [1 \ x \ y \ z][C]^{-1} \{\Phi\}. \quad (4.42)$$

Відомо, що визначник $[C]$ дорівнює шести об'ємам тетраедра.

Приклад 4.3. Розглянемо тетраедр з такими координатами вершин

(рис. 4.5). Необхідно знайти функції форми, використовуючи обернену матрицю.

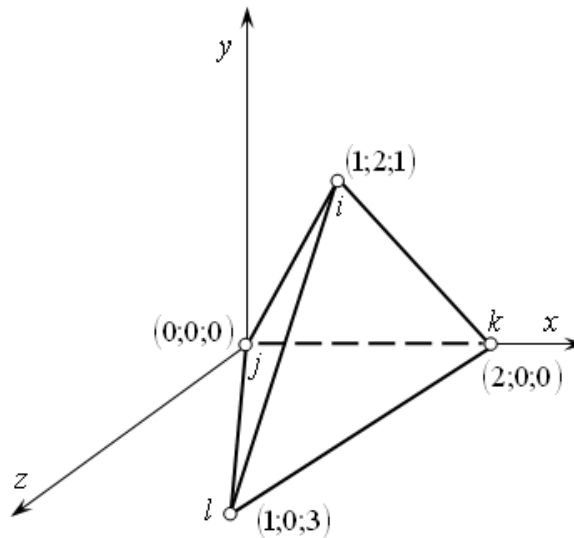


Рис. 4.5. Тривимірний симплекс-елемент до прикладу 4.3

Відповідно до заданих координат вузлів складемо матрицю $[C]$

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & X_i & Y_i & Z_i \\ 1 & X_j & Y_j & Z_j \\ 1 & X_k & Y_k & Z_k \\ 1 & X_l & Y_l & Z_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Визначимо обернену матрицю

$$[C]^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тут обернена матриця помножена на 6 (кожний її елемент), тому перед $[C]^{-1}$ стоїть коефіцієнт $1/6$.

Запишемо інтерполяційний поліном

$$\phi = [1 \ x \ y \ z][C]^{-1}\{\Phi\}.$$

Оскільки

$$\phi = [N]\{\Phi\},$$

то функції форми набувають виду

$$[N] = [1 \ x \ y \ z][C]^{-1}.$$

Після підстановки $[C]^{-1}$ маємо

$$[N] = \frac{1}{6}[1 \ x \ y \ z] \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\text{або } [N] = \left[\frac{y}{2}, \frac{1}{6}(6 - 3x - y - z), \frac{1}{6}(3x - y - z), \frac{1}{6}(-y - 2z) \right].$$

Таким чином, функції форми елемента, що розглядається, мають вид

$$N_i = \frac{y}{2}, \quad N_j = \frac{6 - 3x - y - z}{6}, \quad N_k = \frac{3x - y - z}{6}, \quad N_l = \frac{-y - 2z}{6}.$$

4.4. Двовимірне перенесення теплоти

Трикутний елемент з трьома невідомими широко застосовується при розв'язанні двовимірних задач теплопровідності. Нагадаємо функції форми для лінійного трикутного елемента

$$N_\beta = \frac{1}{2A}(a_\beta + b_\beta x + c_\beta y), \quad \beta = i, j, k, \quad (4.43)$$

де $a_\beta, b_\beta, c_\beta$ – визначені у (4.40). Температура дається формулою

$$T = [N_i \ N_j \ N_k] \begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \end{Bmatrix}, \quad (4.44)$$

де T_i, T_j, T_k – температури у вузлах, вибраних у напрямі проти годинникової стрілки.

Запишемо матрицю градієнтів $[B]$

$$[B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix}, \quad (4.45)$$

і матрицю властивостей матеріалу $[D]$

$$[D] = \begin{bmatrix} \lambda_{xx} & 0 \\ 0 & \lambda_{yy} \end{bmatrix}. \quad (4.46)$$

Тепер можна визначити матрицю жорсткості (теплопровідності) елемента. Перший доданок цієї матриці приймає вид

$$\int_V [B]^T [D][B] dV = \int_V \frac{1}{4A^2} \begin{bmatrix} b_i & c_i \\ b_j & c_j \\ b_k & c_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{xx} & 0 \\ 0 & \lambda_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} dV. \quad (4.47)$$

Припускаючи товщину елемента рівною 1, замінюємо об'єм на площу $dV = d(1 \cdot A) = dA$. Підінтегральний вираз (4.47) не залежить від площі i , тому може бути винесений з-під знака інтеграла

$$\int_V [B]^T [D][B] dV = \int_A [B]^T [D][B] dA = [B]^T [D][B] \int_A dA = A [B]^T [D][B]. \quad (4.48)$$

Визначаючи добутки матриць для елемента, маємо

$$[k^{(e)}] = \frac{\lambda_{xx}}{4A} \begin{bmatrix} b_i b_i & b_i b_j & b_i b_k \\ b_j b_i & b_j b_j & b_j b_k \\ b_k b_i & b_k b_j & b_k b_k \end{bmatrix} + \frac{\lambda_{yy}}{4A} \begin{bmatrix} c_i c_i & c_i c_j & c_i c_k \\ c_j c_i & c_j c_j & c_j c_k \\ c_k c_i & c_k c_j & c_k c_k \end{bmatrix}, \quad (4.49)$$

оскільки інтеграл $\int_A dA = A$.

Другий інтеграл $\int_S \alpha [N]^T [N] dS$ повинен бути обчислений по поверхні. Підставляючи матрицю $[N]$ і виконуючи перемноження матриць, отримуємо

$$\int_S \alpha [N]^T [N] dS = \alpha \int_S \begin{bmatrix} N_i N_i & N_i N_j & N_i N_k \\ N_j N_i & N_j N_j & N_j N_k \\ N_k N_i & N_k N_j & N_k N_k \end{bmatrix} dS, \quad (4.50)$$

Перевірка:

$$\begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i^2 & N_i N_j & N_i N_k \\ N_i N_j & N_j^2 & N_j N_k \\ N_i N_k & N_j N_k & N_k^2 \end{bmatrix}.$$

Функції форми N залежать від x, y , тому добуток виду $N_i N_j$ не може бути винесений за знак інтеграла. Крім того значення інтеграла залежить від того, на якій поверхні елемента має місце конвективний теплообмін.

Якщо, наприклад, конвекції піддана сторона між вузлами i, j (рис. 4.6) то N_k дорівнює нулю вздовж цієї сторони та інтеграл зводиться до такого ви-

разу

$$\int_S \alpha [N]^T [N] dS = \alpha \int_S \begin{bmatrix} N_i N_i & N_i N_j & 0 \\ N_j N_i & N_j N_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} dS. \quad (4.51)$$

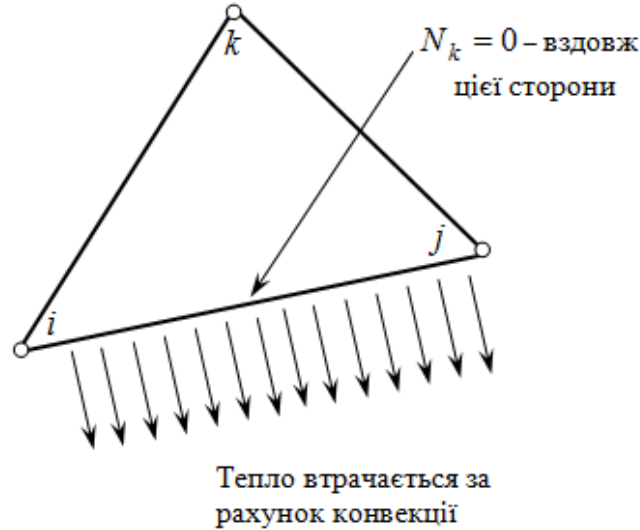


Рис. 4.6. Конвективні втрати теплоти вздовж однієї зі сторін трикутного елемента

Якщо будь-яка з інших двох сторін піддана конвекції, то нулі в матриці (4.51) будуть розташовані по іншому.

Сторона i, k

$$\int_S \alpha [N]^T [N] dS = \alpha \int_S \begin{bmatrix} N_i N_i & 0 & N_i N_k \\ 0 & 0 & 0 \\ N_k N_i & 0 & N_k N_k \end{bmatrix} dS.$$

Сторона j, k

$$\int_S \alpha [N]^T [N] dS = \alpha \int_S \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_j N_j & N_j N_k \\ 0 & N_k N_j & N_k N_k \end{bmatrix} dS.$$

Для програмної реалізації це зауваження не має значення. Ці особливості враховуються автоматично.

Обчислення добутоків у (4.50) не представляє труднощів, якщо застосувати L -координати та відповідні інтегральні формули.

Припускаючи, що

$$L_1 = N_i, \quad L_2 = N_j, \quad L_3 = N_k.$$

Розглянемо спочатку загальний випадок

$$\int_S \alpha [N]^T [N] dS = \alpha \int_{\ell_{ij}} \begin{bmatrix} L_1^2 & L_1 L_2 & L_1 L_3 \\ L_2 L_1 & L_2^2 & L_2 L_3 \\ L_3 L_1 & L_3 L_2 & L_3^2 \end{bmatrix} d\ell, \quad (4.52)$$

де $dS = t d\ell$, причому $t = 1$. У (4.52) входять два типи добутоків: квадрат L_1^2, L_2^2, L_3^2 та перехресний добуток $L_1 L_2, L_1 L_3, L_2 L_1, \dots$

Почнемо з квадрата

$$\int_{\ell_{ij}} L_1^2 d\ell = \int_{\ell_{ij}} L_1^2 L_2^0 d\ell = \frac{2!0!}{(2+0+1)!} \ell_{ij} = \frac{2}{6} \ell_{ij},$$

де ℓ_{ij} – довжина сторони між вузлами i і j . Інтеграл від перехресного добутку дорівнює

$$\int_{\ell_{ij}} L_1 L_2 d\ell = \int_{\ell_{ij}} L_1^1 L_2^1 d\ell = \frac{1!1!}{(1+1+1)!} \ell_{ij} = \frac{1}{6} \ell_{ij}.$$

Підставляючи отримані результати в (4.52), отримуємо

$$\int_S \alpha [N]^T [N] dS = \frac{\alpha \ell_{ij}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (4.53)$$

Із (4.53) можна одержати різні випадки задання граничних умов:

– якщо конвекція задана зі сторони i, j , то $N_k = 0$ на цій стороні, тоді

$$\int_S \alpha [N]^T [N] dS = \frac{\alpha \ell_{ij}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.54)$$

– якщо конвекція задана зі сторони i, k , то на цій стороні $N_j = 0$ і, тоді

$$\int_S \alpha [N]^T [N] dS = \frac{\alpha \ell_{ik}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad (4.55)$$

– якщо конвекція задана зі сторони j, k , то на цій стороні $N_i = 0$ і, тоді

$$\int_S \alpha [N]^T [N] dS = \frac{\alpha \ell_{jk}}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (4.56)$$

Останні три інтеграла у виразі для вектора навантаження також легко визначаються аналітично, якщо скористуватись L -координатами (η -координати). Почнемо з інтеграла $\int_V [N]^T q_v dV$. Припустимо, що $q_v = \text{const}$ всередині елемента (q_v – густина внутрішнього джерела теплоти). Тоді матимемо

$$q_v \int_V [N]^T dV = q_v \int_V \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} dV = q_v \int_A \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} dA = \frac{q_v A}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.57)$$

Припускаючи товщину елемента рівною 1 ($dV = d(A \cdot 1) = dA$), і застосовуючи інтегральну формулу $\int_A L_1^a L_2^b L_3^c dA = \frac{a!b!c!}{(a+b+c+2)!} 2A$ знаходимо, що:

$$\text{для } L_1 \rightarrow \int_V L_1 dV = \int_A L_1 dA = \int_A L_1^1 L_2^0 L_3^0 dA = \frac{1!0!0!}{(1+0+0+2)!} 2A = \frac{1! \cdot 2A}{3!} = \frac{2A}{6} = \frac{A}{3},$$

$$\text{для } L_2 \rightarrow \int_V L_2 dV = \int_A L_2 dA = \int_A L_1^0 L_2^1 L_3^0 dA = \frac{0!1!0!}{(0+1+0+2)!} 2A = \frac{A}{3},$$

$$\text{для } L_3 \rightarrow \int_V L_3 dV = \int_A L_3 dA = \int_A L_1^0 L_2^0 L_3^1 dA = \frac{0!0!1!}{(0+0+1+2)!} 2A = \frac{A}{3}.$$

Таким чином, теплота в тілі елемента розповсюджується порівну по всіх трьох вузлах.

Інтеграли $\int_{S1} [N]^T q dS$ і $\int_{S2} [N]^T \alpha T_\infty dS$ записуються в однаковій формі

$$\int_S [N]^T dS = \int_S \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{Bmatrix} dS, \quad (4.58)$$

Таким чином, тільки один з них потрібно визначати. Оскільки інтеграл (4.58) поверхневий, то його також можна розглядати як і інтеграл (4.50). Результат залежить від того, на якій стороні елемента відбувається конвектив-

ний теплообмін або задана густина теплового потоку q . Припускаючи, що $q = \text{const}$ на поверхні елемента (лінії), для інтеграла (4.58) отримуємо:

$$q \int_S [N]^T dS = \begin{Bmatrix} \frac{q \ell_{ij}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \frac{q \ell_{ik}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \\ \frac{q \ell_{jk}}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \end{Bmatrix}, \quad (4.59)$$

де $\int_{\ell_{ij}} L_1 d\ell = \int_{\ell_{ij}} L_1^1 L_1^0 d\ell = \frac{1!0!}{(1+0+1)!} \ell_{ij} = \frac{1}{2} \ell_{ij}$, аналогічно і для інших змінних.

Інтеграл $\alpha T_\infty \int_S [N]^T dS$ визначається аналогічно (4.59) з врахуванням заміни q на αT_∞ . Якщо тепловий потік або конвективний теплообмін задано з двох сторін елемента, то поверхневий інтеграл включає суму інтегралів по кожній зі сторін. Те ж саме відноситься й до інтегралу (4.50).

Для того, щоб не змінювати матрицю теплопровідності, граничні умови I роду можна моделювати як ГУ III роду. При цьому задавати $T_\infty = T$, а $\alpha \rightarrow \infty$.

У більшості задач про перенос теплоти інтерес представляють температури у вузлових точках. Інколи буває необхідно визначати градієнти температури. Градієнти температури знаходяться із співвідношення

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2|A|} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \end{Bmatrix}. \quad (4.60)$$

Знаючи складові градієнта, неважко визначити компоненти густини теплового потоку за законом Фур'є

$$\begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \lambda_{xx} & 0 \\ 0 & \lambda_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{Bmatrix}. \quad (4.61)$$

Результуючий градієнт і густина теплового потоку визначаються із наступних співвідношень

$$|\text{grad}T| = \sqrt{\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2}; \quad q_s = \sqrt{(q_x)^2 + (q_y)^2}. \quad (4.62)$$

Приклад 4.4. На рис. 4.6 зображено елемент, який використано для дискретизації суцільного середовища. На двох поверхнях цього елемента відбувається конвективний теплообмін. Вказані розміри елемента та фізичні характеристики. Необхідно скласти матриці елемента, припускаючи його товщину $t = 1$.

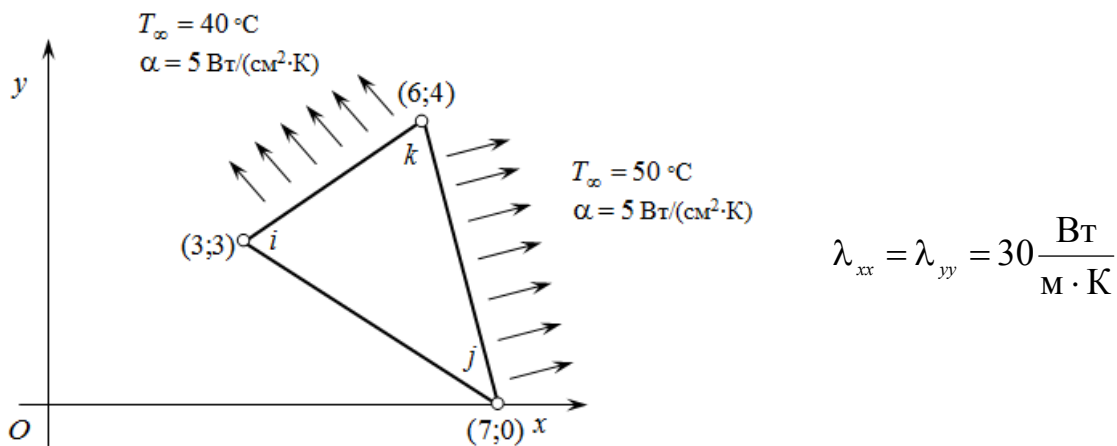


Рис. 4.6. Симплекс-елемент до прикладу 4.4

Розв'язання задачі 4.4. (1-й спосіб)

Розглянемо матрицю теплопровідності елемента

$$\begin{aligned} [k^{(e)}] &= \frac{\lambda_{xx}}{4A} \begin{bmatrix} b_i b_i & b_i b_j & b_i b_k \\ b_j b_i & b_j b_j & b_j b_k \\ b_k b_i & b_k b_j & b_k b_k \end{bmatrix} + \frac{\lambda_{yy}}{4A} \begin{bmatrix} c_i c_i & c_i c_j & c_i c_k \\ c_j c_i & c_j c_j & c_j c_k \\ c_k c_i & c_k c_j & c_k c_k \end{bmatrix} + \frac{\alpha \ell_{ik}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \\ &+ \frac{\alpha \ell_{jk}}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Коефіцієнти b і c :

$$\begin{aligned} b_i &= Y_j - Y_k = 0 - 4 = -4; & c_i &= X_k - X_j = 6 - 7 = -1; \\ b_j &= Y_k - Y_i = 4 - 3 = 1; & c_j &= X_i - X_k = 3 - 6 = -3; \\ b_k &= Y_i - Y_j = 3 - 0 = 3; & c_k &= X_j - X_i = 7 - 3 = 4. \end{aligned}$$

$$2A = \begin{bmatrix} (X_i - X_k) & (X_j - X_k) \\ (Y_i - Y_k) & (Y_j - Y_k) \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 12 + 1 = 13; \quad A = \frac{13}{2}.$$

Довжина сторін ℓ_{ik} і ℓ_{jk} :

$$\begin{aligned} \ell_{ik} &= \sqrt{(X_i - X_k)^2 + (Y_i - Y_k)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10} = 3.162, \\ \ell_{jk} &= \sqrt{(X_j - X_k)^2 + (Y_j - Y_k)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{17} = 4.123. \end{aligned}$$

Підстановка отриманих значень у $[k^{(e)}]$ дає

$$\begin{aligned} [k^{(e)}] &= \frac{30}{26} \begin{bmatrix} 16 & -4 & -12 \\ -4 & 1 & 3 \\ -12 & 3 & 9 \end{bmatrix} + \frac{30}{26} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 3 & 9 & -12 \\ -4 & -12 & 16 \end{bmatrix} + \frac{5 \cdot (3.162)}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \\ &+ \frac{5 \cdot (4.123)}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{15}{13} \begin{bmatrix} 17 & -1 & -16 \\ -1 & 10 & -9 \\ -16 & -9 & 25 \end{bmatrix} + \frac{5}{6} \begin{bmatrix} 6.32 & 0 & 3.16 \\ 0 & 8.24 & 4.12 \\ 3.16 & 4.12 & 14.56 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 24.882 & -1.154 & -15.828 \\ -1.154 & 18.405 & -6.951 \\ -15.828 & -6.951 & 40.979 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Вектор навантаження елемента $\{f^{(e)}\}$ представляє суму двох інтегралів по поверхні для кожної зі сторін, де задано конвективний теплообмін

$$\{f^{(e)}\} = \frac{\alpha T_\infty \ell_{ik}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{\alpha T_\infty \ell_{jk}}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{5 \cdot 40 \cdot 3.16}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{5 \cdot 50 \cdot 4.12}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 316 \\ 515 \\ 831 \end{Bmatrix}.$$

Після розв'язання системи

$$[k^{(e)}]\{T\} = \{f^{(e)}\},$$

отримуємо

$$\begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 43.720 \\ 47.823 \\ 45.277 \end{Bmatrix}.$$

Розв'язання задачі 4.4. (2-й спосіб)

1. Запишемо координати вершин трикутного елемента у вигляді двох векторів:

$$\begin{aligned} X_i &= 3; & Y_i &= 3; \\ X_j &= 7; & Y_j &= 0; \\ X_k &= 6; & Y_k &= 4. \end{aligned}$$

2. Визначимо площу трикутника (скінченного елемента). $2A = |J|$ – Якобіан переходу від прямокутної до косокутної системи координат, тоді

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & 4 \end{vmatrix} = 6,5.$$

3. Матриця коефіцієнтів функцій форми $[N]$ елемента визначається співвідношенням:

$$\begin{aligned} N_\beta &= \frac{1}{2A} (\alpha_\beta + b_\beta x + c_\beta y), \quad \beta = i, j, k; \\ b_i &= Y_j - Y_k = 3 - 7, \quad b_i = -4; \\ c_i &= X_k - X_j = 6 - 7, \quad c_i = -1; \\ b_j &= Y_k - Y_i = 4 - 3, \quad b_j = 1; \\ c_j &= X_i - X_k = 3 - 6, \quad c_j = -3; \\ b_k &= Y_i - Y_j = 3 - 0, \quad b_k = 3; \\ c_k &= X_j - X_i = 7 - 3, \quad c_k = 4. \end{aligned}$$

4. Визначимо матрицю градієнтів елемента:

$$\begin{aligned} [B] &= \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} -4 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & 4 \end{bmatrix}, \\ [B] &= \begin{bmatrix} -0.308 & 0.077 & 0.231 \\ -0.077 & -0.231 & 0.308 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

5. Запишемо матрицю теплопровідності:

$$\lambda_{xx} = \lambda_{yy} = 30,$$

$$[D] = \begin{bmatrix} \lambda_{xx} & 0 \\ 0 & \lambda_{yy} \end{bmatrix}, [D] = \begin{bmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 30 \end{bmatrix}.$$

6. Визначимо матрицю жорсткості. Спочатку обчислимо її частину, яка стосується теплопровідності. Для цього необхідно визначити інтеграл виду

$$[k]_e = \int_V [B]^T [D] [B] dV = [B]^T [D] [B] \int_V dV = At [B]^T [D] [B],$$

де t – товщина елемента, яку припускаємо рівною одиниці.

Тоді

$$[k]_{\lambda e} = A [B]^T [D] [B] =$$

$$= 6.5 \begin{bmatrix} -0.308 & 0.077 & 0.231 \\ -0.077 & -0.231 & 0.308 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.308 & 0.077 & 0.231 \\ -0.077 & -0.231 & 0.308 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 19.61538 & -1.15384 & -18.46153 \\ -1.15384 & 11.53846 & -10.38446 \\ -18.46153 & -10.38446 & 28.84615 \end{bmatrix}.$$

7. Для визначення частини матриці жорсткості, яка пов'язана з граничними умовами III роду спочатку знайдемо довжину сторін елемента:

$$\ell_{ij} = \sqrt{(X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2} = \sqrt{(3 - 7)^2 + (3 - 0)^2}, \ell_{ij} = 5;$$

$$\ell_{jk} = \sqrt{(X_j - X_k)^2 + (Y_j - Y_k)^2} = \sqrt{(7 - 6)^2 + (0 - 4)^2}, \ell_{jk} = 4.123;$$

$$\ell_{ki} = \sqrt{(X_k - X_i)^2 + (Y_k - Y_i)^2} = \sqrt{(6 - 3)^2 + (4 - 3)^2}, \ell_{ki} = 3.162.$$

Частина матриці жорсткості, що пов'язана з ГУ III роду заданими зі сторони j, k , має вид (при цьому $N_i = 0$):

$$[k]_{\alpha e_{jk}} = \frac{\alpha_{jk} \ell_{jk}}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{5 \cdot 4.123}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$[k]_{\alpha e_{jk}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6.872 & 3.436 \\ 0 & 3.436 & 6.872 \end{bmatrix}.$$

Частина матриці жорсткості, що пов'язана з ГУ III роду заданими зі сторони k, i , має вид (при цьому $N_j = 0$):

$$[k]_{\alpha e_{ki}} = \frac{\alpha_{ki} \ell_{ki}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \frac{5 \cdot 3.162}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$[k]_{\alpha e_{jk}} = \begin{bmatrix} 5.27 & 0 & 2.635 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2.635 & 0 & 5.27 \end{bmatrix}.$$

Частина матриці $[k]_{\alpha e_{ij}} = \frac{\alpha_{ij} \ell_{ij}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ – зважаючи на від-

сутність граничних умов III роду на цій стороні елемента.

8. Тоді матриця жорсткості елемента в загальному випадку матиме вид

$$[k]_e = [k]_{\lambda e} + [k]_{\alpha e_{ij}} + [k]_{\alpha e_{jk}} + [k]_{\alpha e_{ki}} = \begin{bmatrix} 24.886 & -1.154 & -15.826 \\ -1.154 & 18.41 & -6.949 \\ -15.826 & -6.949 & 40.988 \end{bmatrix}.$$

9. Визначимо доданки у вектор вільних членів СЛАР $[f]_e$, що пов'язані з ГУ III роду.

Сторона j, k ($N_i = 0$)

$$[f]_{\alpha e_{jk}} = \alpha T_\infty \int_S [N]^T dS = \frac{\alpha_{jk} t_{jk} \ell_{jk}}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{5 \cdot 50 \cdot 4.132}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 515.388 \\ 515.388 \end{Bmatrix}.$$

Сторона k, i ($N_j = 0$)

$$[f]_{\alpha e_{ki}} = \frac{\alpha_{ki} t_{ki} \ell_{ki}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{5 \cdot 40 \cdot 3.162}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 316.2 \\ 0 \\ 316.2 \end{Bmatrix}.$$

Сторона i, j ($N_k = 0$) $[f]_{\alpha e_{ij}} = \frac{\alpha_{ij} t_{ij} \ell_{ij}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ – зважаючи на відсутність

граничних умов III роду на цій стороні елемента.

10. Тоді вектор вільних членів $[f]_e$ буде мати вид

$$[f]_e = [f]_{\alpha e_{ij}} + [f]_{\alpha e_{jk}} + [f]_{\alpha e_{ki}} = \begin{Bmatrix} 316.2 \\ 515.388 \\ 831.616 \end{Bmatrix}.$$

11. Розв'язуємо СЛАР і, таким чином, знаходимо значення температури у вузлових точках елемента

$$\{T\} = ([k]_e)^{-1} [f]_e = \begin{bmatrix} 24.886 & -1.154 & -15.826 \\ -1.154 & 18.41 & -6.949 \\ -15.826 & -6.949 & 40.988 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 316.2 \\ 515.388 \\ 831.616 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 43.719 \\ 47.824 \\ 45.277 \end{Bmatrix}.$$

12. Визначимо вектор градієнтів температури елемента

$$\{g\}_T = \begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{Bmatrix} = [B]\{T\} = \begin{bmatrix} -0.308 & 0.077 & 0.231 \\ -0.077 & -0.231 & 0.308 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 43.719 \\ 47.824 \\ 45.277 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.675 \\ -0.468 \end{Bmatrix}.$$

13. Визначимо результуючий (сумарний) градієнт елемента

$$|\text{grad}T| = \sqrt{(g_x)^2 + (g_y)^2} = \sqrt{(0.675)^2 + (-0.468)^2} = 0.822.$$

14. Визначимо складові густини теплового потоку елемента

$$\{q\} = -[D]\{g\}_T = -\begin{bmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 30 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.675 \\ -0.468 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -20.261 \\ 14.035 \end{Bmatrix}.$$

15. Визначимо результуючу (сумарну густину) теплового потоку елемента

$$|q| = \sqrt{(q_x)^2 + (q_y)^2} = \sqrt{(-20.261)^2 + (14.035)^2} = 24.648.$$

4.5. Тривимірне перенесення теплоти

Вивід співвідношень для елемента у тривимірних задачах переносу теплоти аналогічний відповідним процедурам у двовимірному випадку. Як елемент дискретизації розрахункової області розглянемо тетраedr з чотирма вузлами (рис. 4.7).

Функції форми, що відповідають даному елементу, мають вид

$$N_{\beta} = a_{\beta} + b_{\beta}x + c_{\beta}y + d_{\beta}z, \quad \beta = i, j, k, l, \quad (4.63)$$

де константи $a_{\beta}, b_{\beta}, c_{\beta}, d_{\beta}$ обчислюються з використанням визначників або матричним множенням, як показано в п. 4.3. Запишемо відповідні матриці (функцій форми та градієнтів):

$$[N] = [N_i \ N_j \ N_k \ N_l], \quad (4.64)$$

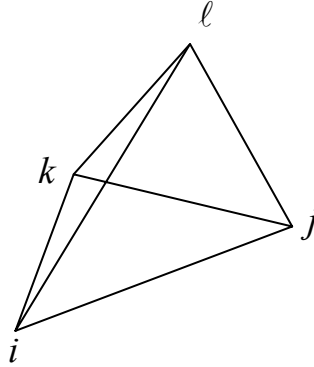


Рис. 4.7. Скінченний елемент – тетраедр

$$[B] = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k & b_l \\ c_i & c_j & c_k & c_l \\ d_i & d_j & d_k & d_l \end{bmatrix}, \quad (4.65)$$

$$\text{де } |J| = 6V = \begin{bmatrix} X_i - X_l & X_j - X_l & X_k - X_l \\ Y_i - Y_l & Y_j - Y_l & Y_k - Y_l \\ Z_i - Z_l & Z_j - Z_l & Z_k - Z_l \end{bmatrix}.$$

Інтеграли визначаються аналітично, якщо скористуватись об'ємними L -координатами:

$$L_1 = N_i, \quad L_2 = N_j, \quad L_3 = N_k, \quad L_4 = N_l.$$

Аналітичне визначення інтегралу матриці жорсткості дає такі співвідношення

$$\begin{aligned}
\int_V [B]^T [D][B] dV &= [B]^T [D][B] \int_V dV = V [B]^T [D][B] = \\
&= \frac{\lambda_{xx}}{36V} \begin{bmatrix} b_i b_i & b_i b_j & b_i b_k & b_i b_\ell \\ b_j b_i & b_j b_j & b_j b_k & b_j b_\ell \\ b_k b_i & b_k b_j & b_k b_k & b_k b_\ell \\ b_\ell b_i & b_\ell b_j & b_\ell b_k & b_\ell b_\ell \end{bmatrix} + \frac{\lambda_{yy}}{36V} \begin{bmatrix} c_i c_i & c_i c_j & c_i c_k & c_i c_\ell \\ c_j c_i & c_j c_j & c_j c_k & c_j c_\ell \\ c_k c_i & c_k c_j & c_k c_k & c_k c_\ell \\ c_\ell c_i & c_\ell c_j & c_\ell c_k & c_\ell c_\ell \end{bmatrix} + \\
&\quad + \frac{\lambda_{zz}}{36V} \begin{bmatrix} d_i d_i & d_i d_j & d_i d_k & d_i d_\ell \\ d_j d_i & d_j d_j & d_j d_k & d_j d_\ell \\ d_k d_i & d_k d_j & d_k d_k & d_k d_\ell \\ d_\ell d_i & d_\ell d_j & d_\ell d_k & d_\ell d_\ell \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.66}$$

У (4.66) підінтегральний вираз $[B]^T [D][B]$ не залежить від об'єму i , тому виноситься з-під знака інтеграла, а $\int_V dV = V$.

Як визначати коефіцієнти a, b, c, d ?

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & X_i & Y_i & Z_i \\ 1 & X_j & Y_j & Z_j \\ 1 & X_k & Y_k & Z_k \\ 1 & X_l & Y_l & Z_l \end{bmatrix}.$$

Рядок коефіцієнтів $\{\alpha\}$ може бути отриманий за допомогою оберненої матриці $[C]^{-1}$

$$\{\alpha\} = [C]^{-1} \{\Phi\}.$$

Однак, існує інший більш простий спосіб, у якому коефіцієнти a, b, c, d – отримуються циклічною перестановкою індексів 1, 2, 3, 4, наприклад, для індексу i , маємо:

$$a_i = \begin{bmatrix} X_j & Y_j & Z_j \\ X_k & Y_k & Z_k \\ X_\ell & Y_\ell & Z_\ell \end{bmatrix}, \quad b_i = - \begin{bmatrix} 1 & Y_j & Z_j \\ 1 & Y_k & Z_k \\ 1 & Y_\ell & Z_\ell \end{bmatrix},$$

$$c_i = - \begin{bmatrix} X_j & 1 & Z_j \\ X_k & 1 & Z_k \\ X_\ell & 1 & Z_\ell \end{bmatrix}, \quad d_i = - \begin{bmatrix} X_j & Y_j & 1 \\ X_k & Y_k & 1 \\ X_\ell & Y_\ell & 1 \end{bmatrix},$$

для індексу j , маємо:

$$a_j = \begin{bmatrix} X_i & Y_i & Z_i \\ X_k & Y_k & Z_k \\ X_\ell & Y_\ell & Z_\ell \end{bmatrix}, \quad b_j = \begin{bmatrix} 1 & Y_i & Z_i \\ 1 & Y_k & Z_k \\ 1 & Y_\ell & Z_\ell \end{bmatrix},$$

$$c_j = \begin{bmatrix} X_i & 1 & Z_i \\ X_k & 1 & Z_k \\ X_\ell & 1 & Z_\ell \end{bmatrix}, \quad d_j = \begin{bmatrix} X_i & Y_i & 1 \\ X_k & Y_k & 1 \\ X_\ell & Y_\ell & 1 \end{bmatrix},$$

для індексу k , маємо:

$$a_k = \begin{bmatrix} X_i & Y_i & Z_i \\ X_j & Y_j & Z_j \\ X_\ell & Y_\ell & Z_\ell \end{bmatrix}, \quad b_k = - \begin{bmatrix} 1 & Y_i & Z_i \\ 1 & Y_j & Z_j \\ 1 & Y_\ell & Z_\ell \end{bmatrix},$$

$$c_k = - \begin{bmatrix} X_i & 1 & Z_i \\ X_j & 1 & Z_j \\ X_\ell & 1 & Z_\ell \end{bmatrix}, \quad d_k = - \begin{bmatrix} X_i & Y_i & 1 \\ X_j & Y_j & 1 \\ X_\ell & Y_\ell & 1 \end{bmatrix},$$

для індексу ℓ , маємо:

$$a_\ell = \begin{bmatrix} X_i & Y_i & Z_i \\ X_j & Y_j & Z_j \\ X_k & Y_k & Z_k \end{bmatrix}, \quad b_\ell = \begin{bmatrix} 1 & Y_i & Z_i \\ 1 & Y_j & Z_j \\ 1 & Y_k & Z_k \end{bmatrix},$$

$$c_\ell = \begin{bmatrix} X_i & 1 & Z_i \\ X_j & 1 & Z_j \\ X_k & 1 & Z_k \end{bmatrix}, \quad d_\ell = \begin{bmatrix} X_i & Y_i & 1 \\ X_j & Y_j & 1 \\ X_k & Y_k & 1 \end{bmatrix}.$$

Інтеграл по поверхні, що пов'язаний з конвекцією на трикутній поверхні елемента з вершинами ijk – напроти ℓ , визначається як

$$\int_S \alpha [N]^T [N] dS = \frac{\alpha A_{ijk}}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.67)$$

на трикутній поверхні елемента з вершинами $ij\ell$ – напроти k

$$\int_S \alpha [N]^T [N] dS = \frac{\alpha A_{ij\ell}}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad (4.68)$$

на трикутній поверхні елемента з вершинами $ik\ell$ – напроти j

$$\int_S \alpha [N]^T [N] dS = \frac{\alpha A_{ik\ell}}{12} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (4.69)$$

на трикутній поверхні елемента з вершинами $jk\ell$ – напроти i

$$\int_S \alpha [N]^T [N] dS = \frac{\alpha A_{jk\ell}}{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (4.70)$$

де, наприклад, площа грані тетраедра A_{ijk} визначається як

$$p_1 = \begin{vmatrix} Y_i - Y_k & Z_i - Z_k \\ Y_j - Y_k & Z_j - Z_k \end{vmatrix}, \quad p_2 = -\begin{vmatrix} X_i - X_k & Z_i - Z_k \\ X_j - X_k & Z_j - Z_k \end{vmatrix}, \quad p_3 = \begin{vmatrix} X_i - X_k & Y_i - Y_k \\ X_j - X_k & Y_j - Y_k \end{vmatrix},$$

$$2A_{ijk} = |J| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}.$$

Використовуючи $\int_A L_1^a L_2^b L_3^c dA = \frac{a!b!c!}{(a+b+c+2)!} 2A$, маємо, що:

$$[N]^T [N] = \begin{bmatrix} L_1^2 & L_1 L_2 & L_1 L_3 & L_1 L_4 \\ L_2 L_1 & L_2^2 & L_2 L_3 & L_2 L_4 \\ L_3 L_1 & L_3 L_2 & L_3^2 & L_3 L_4 \\ L_4 L_1 & L_4 L_2 & L_4 L_3 & L_4^2 \end{bmatrix},$$

$$\int_A L_1^1 L_2^1 L_3^0 dA = \frac{1!!0!}{(1+1+0+2)!} 2A = \frac{2}{4!} A = \frac{A}{12}.$$

Інтеграл об'ємного навантаження обумовлений дією внутрішнього джерела теплоти визначається як

$$\int_V [N]^T q_V dV = \frac{q_V V}{4} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (4.71)$$

Використовуючи L -координати, маємо

$$\int_V L_1^a L_2^b L_3^c L_4^d dV = \frac{a!b!c!d!}{(a+b+c+d+3)!} 6V,$$

$$[N]^T = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{bmatrix}.$$

$$\int_V N_1 dV = \int_V L_1^1 L_2^0 L_3^0 L_4^0 dV = \frac{1!0!0!0!}{(1+0+0+0+3)!} 6V = \frac{6V}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{V}{4},$$

аналогічно отримуємо для решти з трьох коефіцієнтів форми.

Вектор навантаження – інтеграл, що пов'язаний з конвекцією (ГУ III), має вид

$$\int_S \alpha T_\infty [N]^T dS = \alpha T_\infty \int_S [N]^T dS, \quad (4.72)$$

на трикутній поверхні елемента з вершинами ijk – напроти ℓ

$$\alpha T_{\infty} \int_S [N]^T dS = \frac{\alpha T_{\infty} A_{ijk}}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.73)$$

на трикутній поверхні елемента з вершинами $ij\ell$ – напроти k

$$\alpha T_{\infty} \int_S [N]^T dS = \frac{\alpha T_{\infty} A_{ij\ell}}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (4.74)$$

на трикутній поверхні елемента з вершинами $ik\ell$ – напроти j

$$\alpha T_{\infty} \int_S [N]^T dS = \frac{\alpha T_{\infty} A_{ik\ell}}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (4.75)$$

на трикутній поверхні елемента з вершинами $jk\ell$ – напроти i

$$\alpha T_{\infty} \int_S [N]^T dS = \frac{\alpha T_{\infty} A_{jk\ell}}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.76)$$

Використовуючи $\int_A L_1^a L_2^b L_3^c dA = \frac{a!b!c!}{(a+b+c+2)!} 2A$, визначимо інтеграл по площі для (4.72)

$$\int_A L_1^1 L_2^0 L_3^0 dA = \frac{1!0!0!}{(1+0+0+2)!} 2A = \frac{2}{3!} A = \frac{A}{3}.$$

Вектор навантаження – інтеграл, що пов'язаний з тепловим потоком (ГУ II роду), має вид

$$\int_S q[N]^T dS = q \int_S [N]^T dS. \quad (4.77)$$

Для визначення (4.77) вирази, аналогічні – (4.73)–(4.76).

Температури у вузлових точках визначаються із розв'язку СЛАР виду (для одного елемента)

$$[k^{(e)}]\{T\} = -\{f^{(e)}\}, \quad (4.78)$$

або для всієї області, що розбита на E елементів

$$\sum_{e=1}^E [k^{(e)}]\{T\} + \sum_{e=1}^E \{f^{(e)}\} = 0. \quad (4.79)$$

Після розв'язання СЛАР (4.79) градієнти температури знаходяться в кожному елементі-тетраедрі із співвідношення

$$\{\nabla T\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{Bmatrix} = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k & b_\ell \\ c_i & c_j & c_k & c_\ell \\ d_i & d_j & d_k & d_\ell \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \\ T_\ell \end{Bmatrix} = [B]\{T\}, \quad (4.80)$$

а густина теплових потоків

$$\begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \lambda_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{Bmatrix}. \quad (4.81)$$

Сумарний тепловий потік

$$|\mathbf{q}| = \sqrt{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2}. \quad (4.82)$$

За аналогічною (4.82) формулою можна також визначити сумарний градієнт температури елемента.

4.6. Побудова числової моделі теплового стану тунельної печі у програмному комплексі ANSYS Mechanical APDL

Ліцензійні програмні продукти ANSYS Academic Teaching у 2011–

2012 рр. використовувалися при підготовці студентів (інженерів нового покоління – спеціалістів у області наукоємного комп’ютерного інжиніринга) на кафедрі ХПСМ ІХФ для напряму підготовки «Машинобудування» відповідно до Договору про використання програмних продуктів ANSYS між ЗАТ «CADFEM-CIS», м. Москва, Російська Федерація і ІХФ НТУУ «КПІ», м. Київ, Україна.

Для виконання багатьох інженерних розрахунків можна застосовувати програмний продукт ANSYS Mechanical APDL (ANSYS Parametric Design Language), який входить до складу обчислювальної системи ANSYS. Програмний продукт ANSYS Multiphysics або ANSYS Mechanical APDL (який базується на методі скінченних елементів) дозволяє проводити розрахунки двома способами: за допомогою GUI Interface в діалоговому режимі або в пакетному режимі з використання макросів, що написані на мові програмування APDL – ANSYS Parametric Design Language (мова програмування APDL фактично це видозмінений FORTRAN з командами ANSYS). Незалежно від способу проведення розрахунків у ANSYS Multiphysics порядок побудови числових моделей, виконання розрахунків та перегляд результатів є однаковим.

У цьому пункті приведено основні етапи побудови числової моделі для визначення стаціонарного теплового стану об’єкта дослідження та відповідний макрос для пакетного режиму виконання розрахунків.

Розглянемо розрахунок теплового стану промислового об’єкта на прикладі тунельної печі (рис. 4.8).

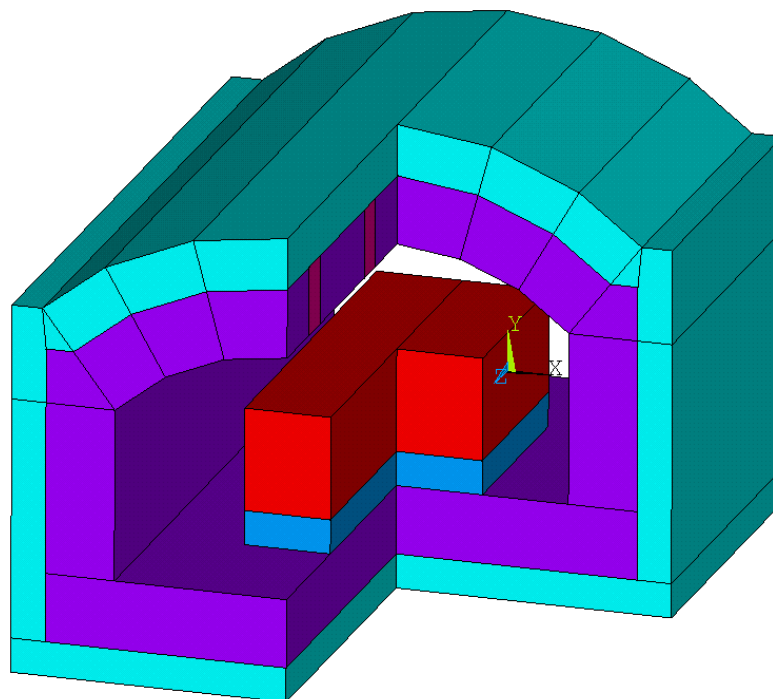


Рис. 4.8. Твердотільна модель фрагменту тунельної печі

Основні етапи побудови числової моделі у ANSYS Mechanical APDL при числовому аналізі стаціонарного поля температур такі:

1) Імпорт твердотільної моделі, що побудована в іншій CAD-системі. Можна також будувати твердотільну модель, використовуючи інструменти Препроцесора ANSYS Mechanical APDL.

2) Склеювання елементів конструкції твердотільної моделі (якщо їх кількість більше одного) та стискання номерів (точок, ліній, поверхонь і об'ємів).

3) Присвоєння номерів матеріалів елементам конструкції числової моделі.

4) Задання теплопровідності відповідно до номерів матеріалів.

5) Вибір типу скінченного елемента.

6) Дискретизація моделі (або побудова розрахункової сітки).

7) Задання граничних умов конвективного і радіаційного типів.

8) Задання параметрів радіаційного Розв'язувача.

9) Розв'язання задачі.

10) Перегляд результатів розрахунків у Постпроцесорі.

11) Розрахунок тепловтрат зовнішніх поверхонь печі.

Тепер перейдемо до макросів, що написані на APDL, у яких наведено коментарі для розуміння призначення кожного або групи операторів.

4.6.1. Макрос APDL (головний)

FINISH ! кінець (тут знак «!» означає коментар)

/CLEAR,NOSTART ! Очистка екрану

/title, Kiln Tunnel --> radiosity_3D ! Титул моделі

/PLOPTS,INFO,ON ! Завдання параметрів графічного виводу інформації

/PREP7 ! Вхід у Препроцесор

ET,1,SOLID70 ! вибір (задання) скінченного елемента. SOLID70 – це 8-и
!вузловий тривимірний елемент для теплового аналізу, який може бути як
!тетраедром, так і гексагедроном

! імпорт твердотільної моделі печі із файлу Tunnel_1.x_t --> parasolid
~PARAIN,Tunnel_1,x_t,'...\Stud_Ans',SOLIDS,0,0

/FACET,NORML ! установка показу граней моделі (стандартний каркасний
!вигляд моделі)

/REPLOT ! перебудова моделі у вікні Препроцесора

! Видалення об'ємів повітря у печі (внутрішній об'єм печі вважається

!діатермічним середовищем)

VDELE, 1, , ,1

VDELE, 41, , ,1

VDELE, 69, , ,1

ALLSEL ! виділення усіх об'єктів моделі

VSEL,ALL \$ VGLUE,ALL \$ NUMCMP,ALL ! у одному рядку три

!команди: 1 – виділення всіх об'єктів, 2 – склеювання, 3 – стискання

!номерів

! задання номерів матеріалів

vMat_Izol = 1 ! 1 – ізоляція 1

vMat_Shamol = 2 ! 2 – шамол

vMat_Satka = 3 ! 3 – садка

vMat_Izol_S = 4 ! 4 – ізоляція 2

vMat_Heater = 5 ! 6 – електричні нагрівачі

! виділення номерів об'єктів, які відповідають зовнішній ізоляції

VSEL,s,,,68 ! тут «s» – означає виділити

VSEL,a,,,69 ! тут і далі «a» – означає довиділити до попередньо виділених

VSEL,a,,,78

VSEL,a,,,91

VSEL,a,,,3

VSEL,a,,,92

VSEL,a,,,93

VSEL,a,,,88

VSEL,a,,,86

VSEL,a,,,85

VSEL,a,,,89

VSEL,a,,,87

VSEL,a,,,84

VSEL,a,,,77

VSEL,a,,,72

VSEL,a,,,2

VSEL,a,,,1

VSEL,a,,,70

VSEL,a,,,76

VSEL,a,,,71

VSEL,a,,,75

CM,List_Volu_Isol,Volu ! формул. списку об'єктів з іменем List_Volu_Isol

VATT,vMat_Izol ! присвоєння виділеним об'єктам номеру матеріалу

!vMat_Izol

! виділення номерів об'ємів, які відповідають нагрівачам

VSEL,s,,,22

VSEL,a,,,59

VSEL,a,,,48

VSEL,a,,,32

VSEL,a,,,33

VSEL,a,,,5

VSEL,a,,,8

VSEL,a,,,37

VSEL,a,,,36

VSEL,a,,,49

VSEL,a,,,57

VSEL,a,,,19

VSEL,a,,,10

VSEL,a,,,40

VSEL,a,,,39

VSEL,a,,,51

VSEL,a,,,63

VSEL,a,,,29

VSEL,a,,,12

VSEL,a,,,44

VSEL,a,,,43

VSEL,a,,,52

VSEL,a,,,61

VSEL,a,,,26

CM,List_Volu_Heater,VOLU ! формування списку об'ємів з іменем

!List_Volu_Heater

VATT,vMat_Heater ! присв. виділеним об'ємам ном. мат. vMat_Heater

! виділення номерів об'ємів, які відповідають підставці під садку

VSEL,s,,,53

VSEL,a,,,73

VSEL,a,,,54

VATT,vMat_Izol_S ! присв. виділеним об'ємам ном. мат. vMat_Izol_S

! виділення номерів об'ємів, які відповідають садці

VSEL,s,,,17

VSEL,a,,,16

VSEL,a,,,67

VATT,vMat_Satka ! присв. виділеним об'ємам ном. мат. vMat_Satka

! виділення номерів об'ємів, які відповідають шамоту

VSEL,All ! виділення всіх об'ємів

VSEL,U,MAT,,vMat_Satka ! зняти виділення vMat_Satka

VSEL,U,MAT,,vMat_Izol ! зняти виділення vMat_Izol

VSEL,U,MAT,,vMat_Izol_S ! зняти виділення vMat_Izol_S

VSEL,U,MAT,,vMat_Heater ! зняти виділення vMat_Heater

VATT,vMat_Shamoto ! присв. виділеним об'ємам ном. мат. vMat_Shamoto

VSEL,ALL ! виділення всіх об'ємів

/NUMBER,1 ! включення нумерації

/PNUM,MAT,1 ! включення підсвічування матеріалів різними кольорами

/REPLOT ! перебудова моделі

! задання теплопровідності матеріалів

MP,KXX,vMat_Izol ,0.2 ! ізоляція 1 $\lambda=0,2$ Вт/(м·К)

MP,KXX,vMat_Shamoto,1.2 ! шамот 1 $\lambda=0,2$ Вт/(м·К)

MP,KXX,vMat_Satka ,5.0 ! садка $\lambda=5,0$ Вт/(м·К)

MP,KXX,vMat_Izol_S,0.3 ! ізоляція 2 $\lambda=0,3$ Вт/(м·К)

MP,KXX,vMat_Heater,25.0 ! нагрівачі $\lambda=25$ Вт/(м·К)

! дискретизація твердотільної моделі печі – mesh

ESIZE,0.1,0, ! задання розміру елемента

EXTOPT,VSWE,TETS,1 ! опція – якщо неможливо розбити на

!гексаедрони, проводити розбивку тетраедрами

VSEL,ALL ! виділення всіх об'ємів

CM,List_Volu,VOLU ! формув. списку об'ємів з іменем List_Volu

VSWEEP,List_Volu ! побудова сітки методом SWEEP

! задання ГУ

t_Air = 20 ! температура оточуючого середовища (°C)

Alfa_Bot = 20 ! коефіцієнт тепловіддачі від низу печі, (Вт/(м²·К))

Alfa_Side = 7 ! коефіцієнт тепловіддачі від бічної поверхні печі, (Вт/(м²·К))

Alfa_Top = 12 ! коефіцієнт тепловіддачі від верху печі, (Вт/(м²·К))

! виділення поверхонь низу печі

ASEL,S,,,351 ! одночасне виділення поверхонь з номерами 351, 320, 336

ASEL,A,,,320

ASEL,A,,,336

! формув. списку поверхонь з іменем List_AREA_Bot

CM,List_AREA_Bot,AREA

! завдання ГУ конвективного типу на поверхнях списку List_AREA_Bot
SFA,List_AREA_Bot,1,CONV,Alfa_Bot,t_Air

! виділення бічних поверхонь печі

ASEL,S,,,45
ASEL,A,,,335
ASEL,A,,,342
ASEL,A,,,346
ASEL,A,,,315
ASEL,A,,,325
ASEL,A,,,17
ASEL,A,,,306
ASEL,A,,,311

! формування списку поверхонь з іменем List_AREA_Side

CM,List_AREA_Side,AREA

! завдання ГУ конвективного типу на поверхнях списку List_AREA_Side
SFA,List_AREA_Side,1,CONV,Alfa_Side,t_Air

! виділення поверхонь верху печі

ASEL,S,,,47
ASEL,A,,,344
ASEL,A,,,367
ASEL,A,,,378
ASEL,A,,,369
ASEL,A,,,385
ASEL,A,,,373
ASEL,A,,,381
ASEL,A,,,398
ASEL,A,,,392
ASEL,A,,,390
ASEL,A,,,19

! формування списку поверхонь з іменем List_AREA_Top

CM,List_AREA_Top,AREA

! завдання ГУ конвективного типу на поверхнях списку List_AREA_Top
SFA,List_AREA_Top,1,CONV,Alfa_Top,t_Air

! завдання ступеню чорноти внутрішніх поверхонь печі

Emiss_Pod_Satka = 0.65 ! підставка садки

Emiss_Satka = 0.65 ! садка

Emiss_Pod_Kiln = 0.65 ! подина печі

Emiss_Side_Shamot_Kiln = 0.65 ! шамот на бічних стінках печі

Emiss_Svod_Shamoto_Kiln = 0.65 ! шамот склепіння печі
Emiss_Svod_Heater_Kiln = 0.65 ! нагрівачі

! виділення поверхонь для завдання ступеню чорноти

! підставка садки

ASEL,S,,,253

ASEL,A,,,330

ASEL,A,,,250

ASEL,A,,,329

ASEL,A,,,258

ASEL,A,,,257

ASEL,A,,,328

! формування списку поверхонь з іменем List_AREA_Pod_Satka

CM,List_AREA_Pod_Satka,AREA

! завдання ГУ радіаційного типу на поверхнях списку !List_AREA_Pod_Satka

SFA,List_AREA_Pod_Satka, ,RDSF,Emiss_Pod_Satka,1,

! садка

ASEL,S,,,104

ASEL,A,,,15

ASEL,A,,,107

ASEL,A,,,105

ASEL,A,,,304

ASEL,A,,,101

ASEL,A,,,42

ASEL,A,,,99

ASEL,A,,,13

ASEL,A,,,14

! формування списку поверхонь з іменем List_AREA_Satka

CM,List_AREA_Satka,AREA

! завдання ГУ радіаційного типу на поверхнях списку List_AREA_Satka

SFA,List_AREA_Satka, ,RDSF,Emiss_Satka,1,

! подина печі

ASEL,S,,,361

ASEL,A,,,354

ASEL,A,,,358

! формування списку поверхонь з іменем List_AREA_Pod_Kiln

CM,List_AREA_Pod_Kiln,AREA

! завдання ГУ радіаційного типу на поверхнях списку !List_AREA_Pod_Kiln

SFA,List_AREA_Pod_Kiln, ,RDSF,Emiss_Pod_Kiln,1,

! внутрішні бічні поверхні печі

ASEL,S,,,302

ASEL,A,,,295

ASEL,A,,,291

! формування списку поверхонь з іменем List_AREA_Side_Shamot_Kiln
CM,List_AREA_Side_Shamot_Kiln,AREA

! завдання ГУ радіаційного типу на поверхнях списку

! List_AREA_Side_Shamot_Kiln

SFA,List_AREA_Side_Shamot_Kiln, ,RDSF,Emiss_Side_Shamot_Kiln,1,

! склепіння печі – шамот

ASEL,S,,,130

ASEL,A,,,276

ASEL,A,,,94

ASEL,A,,,91

ASEL,A,,,40

ASEL,A,,,33

ASEL,A,,,122

ASEL,A,,,271

ASEL,A,,,230

ASEL,A,,,179

ASEL,A,,,182

ASEL,A,,,57

ASEL,A,,,111

ASEL,A,,,161

ASEL,A,,,261

ASEL,A,,,118

ASEL,A,,,264

ASEL,A,,,137

ASEL,A,,,332

ASEL,A,,,194

ASEL,A,,,71

ASEL,A,,,152

ASEL,A,,,283

ASEL,A,,,241

ASEL,A,,,208

ASEL,A,,,211

ASEL,A,,,79

ASEL,A,,,140

ASEL,A,,,147

ASEL,A,,,165
ASEL,A,,,222
ASEL,A,,,226
ASEL,A,,,87
! формування списку поверхонь з іменем List_AREA_Svod_Shamot_Kiln
CM,List_AREA_Svod_Shamot_Kiln,AREA
! завдання ГУ радіаційного типу на поверхнях списку
! List_AREA_Svod_Shamot_Kiln
SFA,List_AREA_Svod_Shamot_Kiln, ,RDSF,Emiss_Svod_Shamot_Kiln,1,

! склепіння печі – нагрівники

ASEL,S,,,126
ASEL,A,,,274
ASEL,A,,,233
ASEL,A,,,170
ASEL,A,,,174
ASEL,A,,,38
ASEL,A,,,114
ASEL,A,,,268
ASEL,A,,,236
ASEL,A,,,187
ASEL,A,,,190
ASEL,A,,,61
ASEL,A,,,156
ASEL,A,,,285
ASEL,A,,,245
ASEL,A,,,200
ASEL,A,,,203
ASEL,A,,,75
ASEL,A,,,145
ASEL,A,,,280
ASEL,A,,,248
ASEL,A,,,216
ASEL,A,,,218
ASEL,A,,,81

! формування списку поверхонь з іменем List_AREA_Svod_Heater_Kiln
CM,List_AREA_Svod_Heater_Kiln,AREA
! завдання ГУ радіаційного типу на поверхнях списку
! List_AREA_Svod_Heater_Kiln
SFA,List_AREA_Svod_Heater_Kiln, ,RDSF,Emiss_Svod_Heater_Kiln,1,

! завдання внутрішнього джерела теплоти на електричних нагрівниках
! потужність $P = 75$ кВт
! $qv = P \cdot 1000 / V$, W/m^3
 $P = 75$

! визначення об'єму нагрівників
VSEL,S,,,List_Volu_Heater
VSUM,
*GET,V,VOLU,0,VOLU
! V – об'єм нагрівників, m^3
! завдання внутрішнього джерела в об'ємах нагрівників
BFV,List_Volu_Heater,HGEN,P*1000/V

ALLSEL ! виділення всього

! завдання радіаційних параметрів
STEF,5.67E-8 ! константа Стефана-Больцмана ($Вт/(м^2 \cdot K^4)$)
TOFFST,273 ! встановлення температурної шкали Кельвіна
radopt,0.1,0,1.0e-5,0,100000,,0.1 ! налаштування radopt
SPCTEMP,1,0 ! завдання просторової температури для огороження

/AUX12 ! запуск радіаційного Розв'язувача
!*
HEMIOPT,80 ! налаштування
VFOPT,OFF,, , ,BINA ! відключення запису файлу кутових коефіцієнтів
ALLSEL ! виділення всього

/SOLU ! вхід у Розв'язувач
! параметри для нелінійної задачі
ANTYPE,STATIC ! стаціонарна проблема
NROPT,AUTO ! метод Ньютона-Рафсона
TIME,1 ! час
DELTIM,0.1,.1,1 ! подрібнення часу для ітерацій
SOLVE ! розв'язання задачі

/POST1 ! вхід у Постпроцесор
VSEL,S,LOC,Z, KZ(21),KZ(143) ! виділення об'ємів по координаті Z
VSEL,R,LOC,X, KX(139),KX(143) ! перевиділення об'ємів по корд. X
ESLV,U ! зняти виділення скінченних елементів
EPLOT ! вивід на екран елементів

```
/title, Kiln Tunnel --> radiosity_3D ! титул
PLNSOL,TEMP,,0, ! вивід поля температур печі
```

```
4.6.2. Макрос APDL для визначення тепловтрат з поверхонь печі
ASEL,S,,,Area ! виділення поверхні або списку поверхонь
NSLA,S,1 ! виділення вузлів на поверхні, (1 – означає все, 0-тільки
!внутрішні)
ESLN,S ! виділення елементів, що пов'язані з виділеними вузлами
! =====
*get,el,ELEM,0,NUM,Min ! взяття min номеру елемента з виділених (el)
*get,nel,ELEM,0,count ! взяття кількості виділених елементів (nel)
S_Area = 0 ! оператор присвоєння
tt = 0 ! оператор присвоєння
qr = 0 ! оператор присвоєння
*do,k1,1,nel ! цикл по всіх виділених елементах (k1)
tt1 = 0 ! оператор присвоєння
qq1 = 0 ! оператор присвоєння
knode = 0 ! оператор присвоєння
*do,j,1,8 ! цикл по всіх вузлах елемента (j)
*get,nn,elem,el,node,j ! взяття (у nn) j-го вузла el-го елемента
*if,NSEL(nn),eq,1,then ! оператор IF – перевірка чи належить nn до
!списку виділених
knode = knode+1 ! лічильник вузлів
tt2 = TEMP(nn) ! взяття температури у вузлі (nn)
tt1 = tt1+tt2 ! накопичення суми температур у tt1
! накопичення суми добутків ( $\alpha(t - t_{oc})$ )
qq1 = qq1 + Alfa_out_Foundation*(tt2-T_out_Foundation)
*endif ! кінець IF-оператора
*enddo ! кінець циклу по (j)
tt1=tt1/knode ! середня температура елемента
qq1=qq1/knode ! середня густина теплового потоку на поверхні елем.
F_ARFAC = ARFACE(el) ! взяття площі
qr = qr + qq1*F_ARFAC ! накопичення суми добутків ( $q \cdot F$ )
tt = tt + tt1*F_ARFAC ! накопичення суми добутків ( $t \cdot F$ )
S_Area = S_Area+F_ARFAC ! площа Area
el=ELNEXТ(el) ! номер наступного з виділених елементів
*ENDDO ! кінець циклу по (k1)
! =====
F_out_Foundation = S_Area ! площа Area, м2
TT_out_Foundation = tt/F_out_Foundation ! середня температура, °C
Q_out_Foundation = qr/1000.0 ! тепловтрати кВт
```

Запитання для самоконтролю

1. Які практичні задачі описуються стаціонарним рівнянням потенціалу? Як при цьому змінюються його члени, що пов'язані з джерелом і граничними умовами?
2. У чому полягає варіаційна постановка МСЕ для рівняння потенціалу?
3. Як записується матриця теплопровідності скінченного елемента?
4. Визначення матриці градієнтів скінченного елемента.
5. Як визначається значення потенціалу в будь-якій точці скінченного елемента?
6. Як визначається значення градієнта потенціалу в будь-якій точці скінченного елемента?
7. Як визначається матриця жорсткості скінченного елемента для задачі теорії теплопровідності?
8. Загальний вигляд СЛАР для МСЕ.
9. Визначення двовимірного симплекс-елемента.
10. Алгоритм визначення матриці коефіцієнтів форми двовимірного симплекс-елемента.
11. Формули для визначення градієнтів потенціалу через функції форми двовимірного симплекс-елемента.
12. Основна властивість градієнтів потенціалу двовимірного симплекс-елемента.
13. Як можна побудувати лінію рівня у двовимірному симплекс-елементі?
14. Визначення тривимірного симплекс-елемента.
15. Алгоритм визначення матриці коефіцієнтів форми тривимірного симплекс-елемента.
16. Алгоритм розв'язання двовимірної задачі теплопровідності за допомогою МСЕ, який використовує трикутні елементи (2-й спосіб).
17. Як визначається матриця градієнтів лінійного трикутного елемента?
18. Як визначається довжина сторони скінченного трикутного елемента?
19. Як визначається Якобіан або подвійна площа скінченного трикутного елемента?
20. Назвіть основні співвідношення МСЕ для тетраедра.
21. Як визначається матриця градієнтів лінійного тетраедра?
22. Як визначається Якобіан або шість об'ємів скінченного елемента – тетраедра?
23. Як визначається площа сторони тетраедра?
24. Назвіть основні етапи побудови числової моделі в ANSYS Mechanical APDL.
25. Перерахуйте основні оператори мови програмування APDL що використовуються в макросі числової моделі теплового стану тунельної печі. Опишіть призначення кожного з них.

5. МЕТОД СКІНЧЕННИХ ОБ'ЄМІВ

5.1. Метод скінченних об'ємів для розв'язання задач конвективного теплообміну

5.1.1. Постановка задачі

Конвективний теплообмін описується системою стаціонарних рівнянь механіки суцільного середовища, яка включає у випадку ламінарного руху нестисливої рідини такі рівняння: енергії, збереження кількості руху (наприклад, у наближенні Бусінеска) й нерозривності:

$$\begin{cases} c_p \rho_0 \nabla \cdot (\mathbf{V} T(X)) = \nabla \cdot [\lambda(T) \nabla T(X)] + \mu \Phi; \\ \rho_0 (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\rho_0 \beta (T - T_0) \mathbf{g} - \nabla P + \nabla \cdot (\mu \nabla \mathbf{V}); \\ \nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \end{cases} \quad (5.1)$$

де c_p – масова ізобарна теплоємність, Дж/(кг·К); ρ_0 – густина при температурі

T_0 , кг/м³; $\mathbf{V}^T = (V_x, V_y, V_z)$ – вектор швидкості, м/с; $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ – оператор

Гамільтона; T – температура, К; λ – теплопровідність, Вт/(м·К); $X(x, y, z) \in R^3$ – декартові координати, м; μ – динамічна в'язкість, Па·с; Φ – дисипація енергії, 1/с²; β – коефіцієнт лінійного температурного розширення, К⁻¹; \mathbf{g} – вектор прискорення вільного падіння, м/с²; P – тиск, Па.

Для однозначності постановки (5.1) записуються відповідні ГУ: наприклад, для рівняння енергії I, II – родів, швидкість і тиск для рівнянь збереження кількості руху та нерозривності.

5.1.2. Методика розв'язання задачі

Одним з найбільш ефективних числових методів розв'язання CFD-задач (computational fluid dynamics) у цей час є метод скінченних об'ємів. Розглянемо методику числового розв'язання системи рівнянь (5.1), яка побудована на алгоритмі SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations або напівнеявний метод розв'язку рівнянь, які зв'язують тиск, вперше запропонований L. S. Caretto, S. V. Patankar, D. B. Spalding [14]) на незміщених та зміщених структурованих та неструктурованих тетраїдальних та гексагедроїдальних сітках.

Для більшої наочності представлення універсальної методики МСО спочатку розглянемо дискретизацію фрагменту двовимірної області й використувану при цьому термінологію на прикладі трикутних елементів (комірок) (рис. 5.1). При застосуванні МСО використовуються три групи вузлів: основні

вузли, які розташовані в центрі маси елементів (комірок – скінченних об'ємів); допоміжні вузли, які розташовані на центрах граней; вузли у вершинах елементів, як у МСЕ, для визначення значень дискретних функцій у центрах граней і для графічного представлення результатів розрахунків.

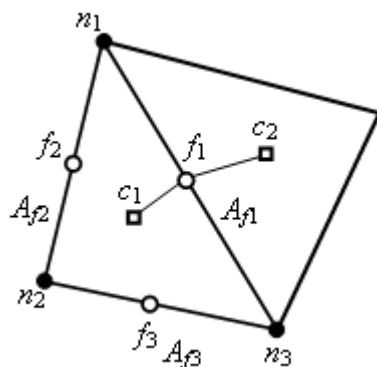


Рис. 5.1. Групи вузлів МСО: c_1, c_2 – основні вузли або вузли комірок;
 f_1, f_2, f_3 – вузли на середині граней комірок; n_1, n_2, n_3 – вузли у вершинах елементів;
 A_{f1}, A_{f2}, A_{f3} – площі відповідних граней комірок

Розглянемо основні лінійні інтерполяційні співвідношення МСО відповідно до прийнятих позначень (див. рис. 5.1). Функція (наприклад, температура) у середній точці грані визначається із співвідношення (див. рис. 5.1)

$$T_{f1} = \frac{\frac{T_{c1}}{r_{c1-f1}} + \frac{T_{c2}}{r_{c2-f1}}}{\frac{1}{r_{c1-f1}} + \frac{1}{r_{c2-f1}}}, \quad (5.2)$$

$$\text{де } r_{c1-f1} = \sqrt{(x_{c1} - x_{f1})^2 + (y_{c1} - y_{f1})^2},$$

$$r_{c2-f1} = \sqrt{(x_{c2} - x_{f1})^2 + (y_{c2} - y_{f1})^2}; \quad x_{c1} = \frac{x_{n1} + x_{n2} + x_{n3}}{3}, \quad y_{c1} = \frac{y_{n1} + y_{n2} + y_{n3}}{3};$$

$$x_{f1} = \frac{x_{n1} + x_{n3}}{2}, \quad y_{f1} = \frac{y_{n1} + y_{n3}}{2}.$$

Дискретну функцію в центрі грані можна також визначати як середнє арифметичне значень функції у вузлах граней. Наприклад, для температури маємо

$$T_f = \frac{1}{n_f} \sum_{k=1}^{n_f} T_k,$$

де n_f – кількість вузлів на грані.

Формула для інтерполяції функції з основних вузлів на вузол у вершині комірки (рис. 5.2)

$$T_{n1} = \frac{\sum_{i=1}^{n_c} \frac{T_{ci}}{r_{ci-n1}}}{\sum_{i=1}^{n_c} \frac{1}{r_{ci-n1}}}, \quad (5.3)$$

де n_c – кількість комірок, що оточують вузол n_1 ;

$$r_{ci-n1} = \sqrt{(x_{ci} - x_{n1})^2 + (y_{ci} - y_{n1})^2}, i = \overline{1, n_c}.$$

6

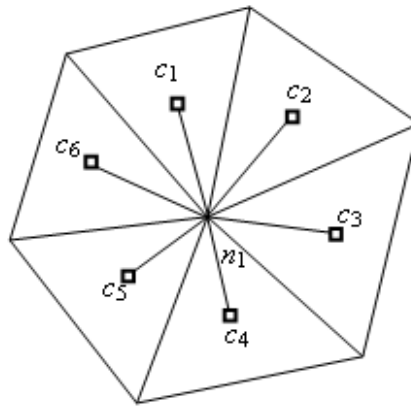


Рис. 5.2. Інтерполяція функції з основних вузлів на вузол у вершині комірки

Представлені співвідношення (5.2), (5.3) справедливі як для R^2 , так і для R^3 -задач і будь-яких комірок: трикутних, чотирикутних, чотирьохгранних, шестигранних та ін.

На прикладі тривимірного стаціонарного рівняння енергії при ламінарному режимі течії в наближенні Бусінеска [9] розглянемо основні положення даної методики з отримання дискретного аналога вихідного рівняння на неструктурованих сітках:

– на гранях комірки маємо для коефіцієнта, пов'язаного з потоком маси

$$F_i = -(c_p \rho_0 u_n A_f)_i = -[c_p \rho_0 (n_x u + n_y v + n_z w)_f A_f]_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (5.4)$$

де m – кількість граней багатогранника (комірки); A_f – площа грані комірки; $(u, v, w)^T$ – вектор компонент швидкості; (n_x, n_y, n_z) – вектор компонент зовнішньої нормалі до грані; $u_n = n_x u + n_y v + n_z w$ – нормальна швидкість на грані комірки; c_p – масова ізобарна теплоємність; ρ_0 – густина при температурі T_0 ;

– коефіцієнт, пов'язаний з дифузною складовою з врахуванням інтерполяційної формули для грані (5.2)

$$D_i = \left[\lambda \frac{\frac{1}{r_{c2-f}}}{r_n \left(\frac{1}{r_{c1-f}} + \frac{1}{r_{c2-f}} \right)} A_f \right]_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (5.5)$$

де λ – теплопровідність; r_{c1-f} і r_{c2-f} – відстань від центрів сусідніх вузлових комірок до центра спільної грані (див. рис. 5.1);

$$r_n = |(x_{c1} - x_{f1})n_x + (y_{c1} - y_{f1})n_y + (z_{c1} - z_{f1})n_z| \quad \text{або для тетраедрів} \quad r_n = \frac{6V}{3A_f} -$$

відстань від центру вузлової комірки до грані по нормалі до грані;

– число Пекле на грані комірки

$$Pe_i = \frac{F_i}{D_i}, \quad i = \overline{1, m}; \quad (5.6)$$

– тоді коефіцієнти при невідомих температурах на гранях комірки будуть визначатися при використанні схеми проти потоку та степеневого закону

$$af_i = D_i \max[(1 - 0.1|Pe_i|)^5, 0] + \max[F_i, 0], \quad i = \overline{1, m}, \quad (5.7)$$

або точного експоненціального закону

$$af_i = D_i \max[Pe_i / [\exp(Pe_i) - 1], 0] + \max[F_i, 0], \quad i = \overline{1, m}; \quad (5.8)$$

– коефіцієнт у центрі вузлової комірки визначається як сума коефіцієнтів всіх граней комірки

$$aC_j = \sum_{i=1}^m af_i, \quad j = \overline{1, M}, \quad (5.9)$$

де j – індекс вузла комірки; M – кількість комірок у розрахунковій області Ω .

Для визначення градієнта в центрі комірки також можна застосувати теорему Гріна-Гауса, після чого для отримання градієнта на грані для (5.5) скористатися лінійною інтерполяцією виду (5.2).

У цьому випадку найбільш простим способом розв'язання СЛАР може бути застосування ітераційного методу Гауса-Зейделя з нижньою релаксацією

$$T_j^{k+1} = T_j^k (1 - \alpha_T) + \frac{\alpha_T \left[\sum_{i=1}^m af_i T'_{l(i)} + S_j \right]}{aC_j}, \quad j = \overline{1, M}, \quad (5.10)$$

де k – номер ітерації; T_j^k – температура в центральному (основному) вузлі комірки; α_T – коефіцієнт релаксації для температури; $T'_{l(i)} = \begin{cases} T_l^{k+1} & \text{при } l < j \\ T_l^k & \text{при } l \geq j \end{cases}$; $l(i)$ – номери комірок, що оточують комірку з індексом j і мають спільні грані з індексом i ; S – вільний член пов'язаний, наприклад, із внутрішнім джерелом теплоти або радіаційним теплообміном.

Перед тим як застосовувати формулу (5.10) для неструктурованих сіток обов'язково необхідно упорядкувати номери вузлів комірок таким чином, щоб ці вузли мали безпосередній зв'язок між собою, тобто були послідовними. Для цього, наприклад, можна використовувати сортування за найменшим значенням квадрату відстані між будь-якою вибраною точкою області та основними вузлами комірок.

Аналогічним чином отримують співвідношення для лінеаризованих рівнянь Нав'є-Стокса:

– для рівняння руху – проекції швидкості на вісь Ox (u) маємо

$$u_j^{k+1} = u_j^k (1 - \alpha_u) + \frac{\alpha_u \left[\sum_{i=1}^m af_i u'_{l(i)} + S_j \right]}{aC_j}, \quad j = \overline{1, M}, \quad (5.11)$$

де u_j^k – проекція швидкості на вісь Ox в основному вузлі комірки; α_u – коефіцієнт релаксації для u ; af_i , aC_j – визначаються із (5.7) і (5.9), відповідно;

$$u'_{l(i)} = \begin{cases} u_l^{k+1} & \text{при } l < j \\ u_l^k & \text{при } l \geq j \end{cases}; \quad S_j = -n_x \sum_{i=1}^m (P_{fi} A_{fi})_j + \rho_0 \beta (T_j^k - T_0) g_x V_j - \text{вільний член,}$$

пов'язаний із градієнтом тиску і гравітаційним навантаженням у наближенні Бусінеска; P_f – тиск на середині грані комірки; β – коефіцієнт лінійного температурного розширення; g_x – проекція прискорення вільного падіння на вісь Ox ; V_j – об'єм комірки;

– для рівняння руху – проекції швидкості на вісь Oy (v) маємо

$$v_j^{k+1} = v_j^k(1 - \alpha_v) + \frac{\alpha_v \left[\sum_{i=1}^m af_i v'_{l(i)} + S_j \right]}{aC_j}, \quad j = \overline{1, M}, \quad (5.12)$$

де v_j^k – проекція швидкості на вісь Oy в основному вузлі комірки; α_v – коефіцієнт релаксації для v ; af_i , aC_j – визначаються із (5.7) і (5.9), відповідно;

$$v'_{l(i)} = \begin{cases} v_l^{k+1} & \text{при } l < j \\ v_l^k & \text{при } l \geq j \end{cases}; \quad S_j = -n_y \sum_{i=1}^m (P_{fi} A_{fi})_j + \rho_0 \beta (T_j^k - T_0) g_y V_j - \text{вільний член,}$$

пов'язаний з градієнтом тиску і гравітаційним навантаженням; g_y – проекція прискорення вільного падіння на вісь Oy ;

– для рівняння руху – проекції швидкості на вісь Oz (w) маємо

4

$$w_j^{k+1} = w_j^k(1 - \alpha_w) + \frac{\alpha_w \left[\sum_{i=1}^m af_i w'_{l(i)} + S_j \right]}{aC_j}, \quad j = \overline{1, M}, \quad (5.13)$$

де w_j^k – проекція швидкості на вісь Oz в основному вузлі комірки; α_w – коефіцієнт релаксації для w ; af_i , aC_j – визначаються із (5.7) і (5.9), відповідно;

$$w'_{l(i)} = \begin{cases} w_l^{k+1} & \text{при } l < j \\ w_l^k & \text{при } l \geq j \end{cases}; \quad S_j = -n_z \sum_{i=1}^m (P_{fi} A_{fi})_j + \rho_0 \beta (T_j^k - T_0) g_z V_j - \text{вільний член}$$

пов'язаний з градієнтом тиску і гравітаційним навантаженням; g_z – проекція прискорення вільного падіння на вісь Oz .

У наведених співвідношеннях (5.11)–(5.13) потоки маси та дифузні потоки визначаються за формулами:

$$F_i = -\left[\rho_0 (n_x u + n_y v + n_z w)_f A_f \right]_i, \quad i = \overline{1, m}; \quad (5.14)$$

$$D_i = \left[\mu \frac{\frac{1}{r_{cl(i)-f}}}{r_n \left(\frac{1}{r_{cj-f}} + \frac{1}{r_{cl(i)-f}} \right)} A_f \right]_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (5.15)$$

де μ – динамічна в'язкість, Па·с.

Рівняння нерозривності відповідно до алгоритму SIMPLE перетворюється в рівняння для визначення поправки на тиск

$$\delta P_j^{k+1} = \delta P_j^k (1 - \alpha_P) + \frac{\alpha_P \left[\sum_{i=1}^m af_i \delta P'_{l(i)} + S_j \right]}{aC_j}, \quad j = \overline{1, M}, \quad (5.16)$$

де α_P – коефіцієнт релаксації для тиску; aC_j – (5.9); $af_i = D_{uvw\ ji} A_{fi}$;

$D_{uvw\ ji} = \frac{A_{fi}}{aC_j}$ – визначається після розв'язання рівняння руху для проекції

швидкості w ; $\delta P'_{l(i)} = \begin{cases} \delta P_l^{k+1} & \text{при } l < j \\ \delta P_l^k & \text{при } l \geq j \end{cases}$; $S_j = -\sum_{i=1}^m \left[(n_x u + n_y v + n_z w)_{fi} \cdot A_{fi} \right]_j$ – віль-

ний член – ліва частина рівняння нерозривності; у співвідношеннях для визначення af_i і S_j проведено скорочення на ρ_0 .

Значення тиску у вузлах визначається із

$$P_j^{k+1} = P_j^k + \gamma \delta P_j^{k+1}, \quad j = \overline{1, M}, \quad (5.17)$$

де γ – коефіцієнт релаксації.

Співвідношення для корекції компонент швидкості у вузлах розрахункової комірки

$$u_j^{k+1} = u_j^k + n_x \sum_{i=1}^m D_{uvw\ ji} \delta P_{fi} A_{fi}, \quad (5.18)$$

$$v_j^{k+1} = v_j^k + n_y \sum_{i=1}^m D_{uvw\ ji} \delta P_{fi} A_{fi}, \quad (5.19)$$

$$w_j^{k+1} = w_j^k + n_z \sum_{i=1}^m D_{uvw\ ji} \delta P_{fi} A_{fi}, \quad (5.20)$$

де δP_{fi} – поправка на тиск на гранях комірки, яка обчислюється по (5.2).

При розв'язанні задачі на незміщених сітках для визначення поля швидкості й тиску можуть виникати нефізичні осциляції поля тиску, що особливо характерно для нестисливої рідини та низькорейнольських потоків газу. Для придушення цих осциляцій використовується корекція потоків за тиском, яка у вигляді спеціальної стабілізуючої поправки додається до витрати маси крізь грань при розв'язанні модифікованого рівняння нерозривності (5.16). Дана поправка базується на розкладенні в ряд Тейлора функції тиску навколо вузла комірки ($P_f = P + \nabla P \cdot \mathbf{r}$) і представляє собою різницю скалярних добутоків градієнтів тиску (∇P) на вектор відстані між центром грані та вузлом комірки (\mathbf{r}) по обидва боки від грані й може бути представлена для результуючого по-

току маси комірки у вигляді

$$S_j = \bar{S}_j - \sum_{i=1}^m D_{uvw\ ji} \left[(\nabla P)_j^k \cdot \mathbf{r}_{i-j} - (\nabla P)_{l(i)}^k \cdot \mathbf{r}_{l(i)-i} \right], \quad (5.21)$$

де $(\nabla P)_j \approx \frac{1}{V_j} \sum_{i=1}^m P_{fi} (\mathbf{n} A_{fi})$ – компоненти градієнту тиску в центральному вузлі комірки з індексом j , які отримані на підставі теореми Гріна-Гауса; $(\nabla P)_{l(i)} \approx \frac{1}{V_{l(i)}} \sum_{k=1}^m P_{fk} (\mathbf{n} A_{fk})$; $l(i)$ – номери комірок, що оточують комірку з індексом j і мають з нею спільні грані з індексом i ; \mathbf{n} – вектор зовнішньої нормалі до грані; A_{fi} – площа грані; $(\mathbf{r}_{i-j})^T = (x_i - x_j, y_i - y_j, z_i - z_j)$; $(\mathbf{r}_{l(i)-i})^T = (x_{l(i)} - x_i, y_{l(i)} - y_i, z_{l(i)} - z_i)$.

Для однозначності стаціонарної задачі розглядаються, наприклад, такі граничні умови для системи рівнянь (5.1): на вхідному перетині – температура та нормальна швидкість потоку рідини; на вихідному перетині – адіабатні умови та нульовий тиск; на границі контакту з твердими поверхнями – тепловий потік та умови прилипання.

Відповідно до приведених співвідношень і заданих ГУ алгоритм SIMPLE на незміщених сітках для ламінарного режиму течії можна записати таким чином:

- 1) Задання поля тиску.
- 2) Розв'язок дискретних рівнянь збереження кількості руху (5.11)–(5.13) та отримання полів компонент швидкості $\mathbf{V}^T = (u, v, w)$.
- 3) Розв'язок модифікованого дискретного рівняння нерозривності (5.16) та отримання поля поправок на тиск δP . При необхідності, перед розв'язком (5.16) проводиться корекція потоків маси за тиском (5.21).
- 4) Корекція тиску по (5.17).
- 5) Корекція компонент швидкості $\mathbf{V}^T = (u, v, w)$ по (5.18)–(5.20).
- 6) Розв'язок дискретного рівняння енергії (5.10). При врахуванні впливу турбулентності розв'язуються також скалярні рівняння характеристик турбулентності відповідно до обраної моделі.
- 7) Перевірка збіжності розв'язку по всіх рівняннях (за балансом енергії в кожній розрахунковій комірці). Якщо збіжність досягнута, то кінець розрахунку. У зворотному випадку – перехід до кроку 2.

Існує також модифікований алгоритм SIMPLE, який дістав назву SIMPLEC (SIMPLE-Consistent, тобто SIMPLE-стійкий). Процедура цього алгоритму аналогічна SIMPLE за виключенням поправки на потік крізь грань у формулах типу (5.18)–(5.20). Коефіцієнт $D_{uvw\ ji}$, який входить у відмічені фо-

рмули уточнюється в ітераційному циклі. Після початкового розв'язку рівняння корекції тиску, градієнт поправки тиску перераховується та використовується для уточнення поправок до масових потоків крізь грань. Алгоритм SIMPLEC порівняно з SIMPLE суттєво зменшує складнощі зі збіжністю, які пов'язані з сильно деформованими сітками.

Для гарантованого запобігання виникненню нефізичних осциляцій у полі тиску використовуються зміщені сітки для визначення поля швидкості й тиску, як це може бути показано на структурованих прямокутних сітках і шаховому порядку розташування контрольних об'ємів навколо грані.

5.2. Застосування методу скінчених об'ємів до розв'язання нестационарної задачі теплопровідності

5.2.1. Постановка задачі

Диференціальне рівняння нестационарної двовимірної теплопровідності (рис. 5.3) має вигляд

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + q_v, \quad (5.22)$$

де ρ – густина, кг/м³; c_p – ізобарна теплоємність, Дж/(кг·К); τ – час, с; λ – теплопровідність, Вт/(м·К); q_v – густина внутрішнього джерела теплоти, Вт/м³; x, y – декартові координати, м.

Початкові умови при $\tau = 0$:

$$T_p = T_0. \quad (5.23)$$

Граничні умови при $\tau > 0$ (див. рис. 5.3):

– на сторонах AB і CD задані адіабатні умови

$$q = 0, \quad (5.24)$$

– на сторонах BC і DA задані умови конвективного теплообміну

$$q_1 = \alpha_1 (T - T_{p1}) \text{ і } q_2 = \alpha_2 (T - T_{p2}), \quad (5.25)$$

де q, q_1, q_2 – густина теплового потоку, Вт/м²; α_1, α_2 – коефіцієнт тепловіддачі, Вт/(м²·К); T_{p1}, T_{p2} – температура рідини, К.

– вузол 5 на границі комірки

$$a_P T_P = a_W T_W + a_N T_N + b, \quad (5.28)$$

$$\text{де } a_W = \frac{\lambda_w}{\delta x_w} \frac{\Delta y}{2}, \quad a_N = \frac{\lambda_n}{\delta y_n} \frac{\Delta x}{2}, \quad a_p^0 = \rho c_p \frac{\Delta x \Delta y}{4 \Delta \tau},$$

$$b = q_v \frac{\Delta x \Delta y}{4} + a_p^0 T_p^0 + \alpha_2 T_{p2} \frac{\Delta y}{2} + q \frac{\Delta x}{2}, \quad a_P = a_W + a_N + a_p^0 + \alpha_2 \frac{\Delta y}{2};$$

– вузол 9 на границі комірки

$$a_P T_P = a_W T_W + a_S T_S + b, \quad (5.29)$$

$$\text{де } a_W = \frac{\lambda_w}{\delta x_w} \frac{\Delta y}{2}, \quad a_S = \frac{\lambda_s}{\delta y_s} \frac{\Delta x}{2}, \quad a_p^0 = \rho c_p \frac{\Delta x \Delta y}{4 \Delta \tau},$$

$$b = q_v \frac{\Delta x \Delta y}{4} + a_p^0 T_p^0 + \alpha_2 T_{p2} \frac{\Delta y}{2} + q \frac{\Delta x}{2}, \quad a_P = a_W + a_S + a_p^0 + \alpha_2 \frac{\Delta y}{2};$$

– вузол 13 на границі комірки

$$a_P T_P = a_E T_E + a_S T_S + b, \quad (5.30)$$

$$\text{де } a_E = \frac{\lambda_e}{\delta x_e} \frac{\Delta y}{2}, \quad a_S = \frac{\lambda_s}{\delta y_s} \frac{\Delta x}{2}, \quad a_p^0 = \rho c_p \frac{\Delta x \Delta y}{4 \Delta \tau},$$

$$b = q_v \frac{\Delta x \Delta y}{4} + a_p^0 T_p^0 + \alpha_1 T_{p1} \frac{\Delta y}{2} + q \frac{\Delta x}{2}, \quad a_P = a_E + a_S + a_p^0 + \alpha_1 \frac{\Delta y}{2};$$

– вузли 2–4 на границі комірок

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + a_N T_N + b, \quad (5.31)$$

$$\text{де } a_W = \frac{\lambda_w}{\delta x_w} \frac{\Delta y}{2}, \quad a_E = \frac{\lambda_e}{\delta x_e} \frac{\Delta y}{2}, \quad a_N = \frac{\lambda_n}{\delta y_n} \Delta x, \quad a_p^0 = \rho c_p \frac{\Delta x \Delta y}{2 \Delta \tau},$$

$$b = q_v \frac{\Delta x \Delta y}{2} + a_p^0 T_p^0 + q \Delta x \rightarrow (q = 0), \quad a_P = a_W + a_E + a_N + a_p^0$$

– вузли 2–4 на границі комірок

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + a_S T_S + b, \quad (5.32)$$

$$\text{де } a_W = \frac{\lambda_w}{\delta x_w} \frac{\Delta y}{2}, \quad a_E = \frac{\lambda_e}{\delta x_e} \frac{\Delta y}{2}, \quad a_N = \frac{\lambda_n}{\delta y_n} \Delta x, \quad a_p^0 = \rho c_p \frac{\Delta x \Delta y}{2 \Delta \tau},$$

$$b = q_v \frac{\Delta x \Delta y}{2} + a_p^0 T_p^0 + q \Delta x \rightarrow (q = 0), \quad a_P = a_W + a_E + a_N + a_p^0;$$

– вузли 10–12 на границі комірок

$$a_P T_P = a_W T_w + a_E T_E + a_S T_S + b, \quad (5.33)$$

де $a_W = \frac{\lambda_w}{\delta x_w} \frac{\Delta y}{2}$, $a_E = \frac{\lambda_e}{\delta x_e} \frac{\Delta y}{2}$, $a_S = \frac{\lambda_s}{\delta y_s} \Delta x$, $a_p^0 = \rho c_p \frac{\Delta x \Delta y}{2 \Delta \tau}$,
 $b = q_v \frac{\Delta x \Delta y}{2} + a_p^0 T_p^0 + q \Delta x \rightarrow (q = 0)$, $a_P = a_W + a_E + a_S + a_p^0$;
 – вузли 6–8 на границі комірок

$$a_P T_P = a_W T_w + a_N T_N + a_S T_S + b, \quad (5.34)$$

де $a_W = \frac{\lambda_w}{\delta x_w} \Delta y$, $a_N = \frac{\lambda_n}{\delta x_n} \frac{\Delta x}{2}$, $a_S = \frac{\lambda_s}{\delta y_s} \frac{\Delta x}{2}$, $a_p^0 = \rho c_p \frac{\Delta x \Delta y}{2 \Delta \tau}$,
 $b = q_v \frac{\Delta x \Delta y}{2} + a_p^0 T_p^0 + \alpha_2 T_{p2} \Delta y$, $a_P = a_W + a_N + a_S + a_p^0 + \alpha_2 \Delta y$;
 – вузли 14–16 на границі комірок

$$a_P T_P = a_E T_E + a_N T_N + a_S T_S + b, \quad (5.35)$$

де $a_E = \frac{\lambda_e}{\delta x_e} \Delta y$, $a_N = \frac{\lambda_n}{\delta x_n} \frac{\Delta x}{2}$, $a_S = \frac{\lambda_s}{\delta y_s} \frac{\Delta x}{2}$, $a_p^0 = \rho c_p \frac{\Delta x \Delta y}{2 \Delta \tau}$,
 $b = q_v \frac{\Delta x \Delta y}{2} + a_p^0 T_p^0 + \alpha_1 T_{p1} \Delta y$, $a_P = a_W + a_N + a_S + a_p^0 + \alpha_1 \Delta y$.

Систему дискретних рівнянь (5.26)–(5.35) або СЛАР можна, наприклад, розв'язати за допомогою ітераційного методу Гауса-Зейделя [14, 26] з нижньою релаксацією

$$\hat{T}_j^{k+1} = \hat{T}_j^k (1 - \alpha_T) + \frac{\alpha_T \left[\sum_{nb} (a_{nb} \hat{T}'_{nb})_{l(nb)} + b_j \right]}{a_{Pj}}, \quad j = \overline{1, M}, \quad (5.36)$$

де k – номер ітерації; \hat{T}_j^k – температура у центральному (основному) вузлі комірки; α_T – коефіцієнт релаксації для температури;

$(\hat{T}'_{nb})_{l(nb)} = \begin{cases} T_l^{k+1} & \text{при } l < j \\ T_l^k & \text{при } l \geq j \end{cases}$; $l(nb)$ – номери комірок, що оточують комірку з індексом j і мають спільні грані з індексом nb ;

$\sum_{nb} (a_{nb} \hat{T}'_{nb})_{l(nb)} = a_{Ej} T_{Ej} + a_{Wj} T_{Wj} + a_{Nj} T_{Nj} + a_{Sj} T_{Sj}$; b_j – вільний член;

$a_{Pj} = a_{Ej} + a_{Wj} + a_{Nj} + a_{Sj} + a_{pj}^0$; \wedge – знак над величиною означає її відношення

до верхнього часового рівня.

Запитання для самоконтролю

1. У чому полягає наближення Бусінеска?
2. Назвіть три групи вузлів при використанні МСО.
3. Основні лінійні інтерполяційні співвідношення МСО.
4. Основні етапи алгоритму SIMPLE на незміщених сітках для ламінарного режиму течії рідини.
5. Чим відрізняється алгоритм SIMPLEC від SIMPLE?
6. Для чого застосовується корекція потоків за тиском?
7. Для чого застосовується схема проти потоку? Порядок її апроксимації?
8. Апроксимація граничних умов II і III родів в дискретних аналогах МСО.
9. Співвідношення для визначення коефіцієнтів $a_E, a_W, a_N, a_S, a_p^0, a_P$ для основних та граничних вузлів комірок.

6. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ РАДІАЦІЙНОГО ТЕПЛООБМІНУ

6.1. Спрощений зональний метод. Теплообмін випромінюванням між твердими тілами, розділеними прозорим середовищем

Розглянемо теплообмін випромінюванням між поверхнями замкненої системи, яка заповнена прозорим (діатермічним) середовищем (тобто середовищем, яке не поглинає, не випромінює й не розсіює випромінювання і, не здійснює впливу на випромінювання, що проходить крізь нього). Ідеально прозорим середовищем є вакуум: як прозоре середовище також можна розглядати повітря при помірних температурах. Термін *замкнена система* означає область, яка повністю оточена сукупністю поверхонь, кожна з яких характеризується певними радіаційними властивостями й температурою (або тепловим потоком). Таким чином, для кожної із цих поверхонь може бути розрахована кількість підведеної та відведеної енергії випромінювання. Отвори в замкнених системах розглядаються як *уявні поверхні*, а енергія випромінювання, що проходить у замкнену систему крізь них, характеризує поверхневу густину потоку енергії, яка випромінюється уявною поверхнею.

У загальному випадку радіаційні властивості поверхонь, що утворюють замкнену систему, можуть змінюватися залежно від напрямку, частоти випромінювання й координати, а температура може бути різною в кожній точці поверхні, однак розв'язання такої загальної задачі достатньо непросте. Аналіз теплообміну випромінюванням у замкненій системі можна значно спростити, якщо розбити всю внутрішню поверхню системи на скінченну кількість зон (рис. 6.1).



Рис. 6.1. Приклад замкненої двовимірної системи, що розбита на N зон

Кожна з цих зон має задовольняти таким умовам:

- 1) Радіаційні властивості поверхні постійні (ε – ступінь чорноти) і не

залежать від напрямку й частоти (довжини хвилі) випромінювання, тобто є «сірими».

2) Для поверхонь кожної зони задані або стала температура (T), або стала густина теплового потоку (q).

3) Поверхні випускають і відбивають випромінювання дифузійно.

4) Густина потоку ефективного випромінювання (тобто сума потоків відбитого і власного випромінювання) стала в межах кожної зони.

5) Поверхні непрозорі, тобто $R = 1 - \varepsilon$.

6.1.1. Спрощений зональний метод для замкнених систем з дифузно-відбивальними поверхнями

Розглянемо замкнену систему, поверхні якої розбиті на N зон, причому для кожної зони радіаційні властивості, температура й густина ефективного випромінювання постійні й не залежать від напрямку. Із цих припущень витікає, що поверхні випромінюють і відбивають дифузійно. Припустимо, що dA_i і dA_j – дві елементарні площадки зон (рис. 6.2) A_i і A_j , відповідно, а r_{ij} – відстань між цими площадками (зонами).

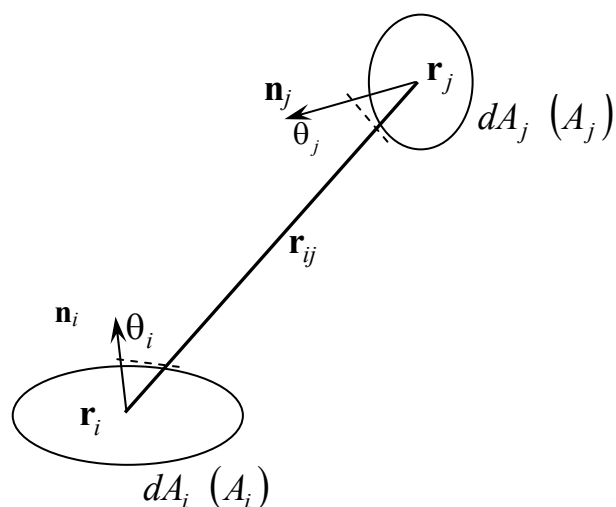


Рис. 6.2. До визначення кутових коефіцієнтів системи: \mathbf{n} – вектор нормалі до елементарної площадки; \mathbf{r}_{ij} – вектор відстані між елементарними площадками; θ – кут між векторами \mathbf{n} і \mathbf{r}_{ij}

6.1.2. Дифузні кутові коефіцієнти

Розглянемо визначення дифузного локального кутового коефіцієнта між елементарною площадкою dA_i і поверхнею A_j . На рис. 6.2 показано елементарну площадку dA_i і поверхню A_j скінченних розмірів. Кутовий коефіцієнт між dA_i і A_j визначається у виді

$$F_{dA_i-A_j} = \int_{A_j} \frac{\cos \theta_i \cos \theta_j}{\pi r^2} dA_j, \quad (6.1)$$

де косинуси знаходяться через скалярний добуток векторів:

$$\cos \theta_i = \frac{\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{r}_{ij}}{r}, \quad (6.2)$$

$$\cos \theta_j = \frac{\mathbf{n}_j \cdot \mathbf{r}_{ji}}{r} = -\frac{\mathbf{n}_j \cdot \mathbf{r}_{ij}}{r}, \quad (6.3)$$

де $r = |\mathbf{r}_{ij}| = \sqrt{\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij}}$ – відстань між елементарними площадками.

Підставляючи (6.2) і (6.3) у (6.1), отримуємо вираз

$$F_{dA_i-A_j} = -\frac{1}{\pi} \int_{A_j} \left(\frac{\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{r}_{ij}}{r^2} \right) \left(\frac{\mathbf{n}_j \cdot \mathbf{r}_{ij}}{r^2} \right) dA_j. \quad (6.4)$$

Розглянемо дифузний середній кутовий коефіцієнт між поверхнями A_i і A_j , який визначається співвідношенням

$$A_i F_{A_i-A_j} = \int_{A_i} F_{dA_i-A_j} dA_i. \quad (6.5)$$

Після підстановки (6.4) у (6.5) остаточно будемо мати

$$F_{A_i-A_j} = F_{ij} = -\frac{1}{\pi A_i} \int_{A_i} \int_{A_j} \left(\frac{\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{r}_{ij}}{r^2} \right) \left(\frac{\mathbf{n}_j \cdot \mathbf{r}_{ij}}{r^2} \right) dA_j dA_i. \quad (6.6)$$

Таким чином, у загальному випадку дифузний середній кутовий коефіцієнт між поверхнями скінченних розмірів визначається двократним інтегралом по цих поверхнях.

Основні властивості кутових коефіцієнтів

$$\sum_{j=1}^N F_{ij} = 1, \quad i = \overline{1, N}, \quad (6.7)$$

причому $F_{ii} = 0$ – для плоскої поверхні.

Умови взаємності: $A_i F_{ij} = A_j F_{ji}$.

6.1.3. Наближення «сірого» тіла

Якщо радіаційні властивості замкненої системи не залежать від частоти випромінювання, то система рівнянь спрощеного зонального методу записується у виді:

$$E_{\text{ef } i} = \varepsilon_i \sigma T_i^4 + R_i \sum_{j=1}^N E_{\text{ef } j} F_{ij}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (6.8)$$

$$q_i = E_{\text{ef } i} - \sum_{j=1}^N E_{\text{ef } j} F_{ij}, \quad (6.9)$$

де $E_{\text{ef } i}$, q_i – густина ефективного й результуючого потоків випромінювання i -ї зони, відповідно, Вт/м²; ε, R – ступінь чорноти й коефіцієнт відбиття зони, відповідно; σ – стала Стефана-Больцмана, Вт/(м²·К⁴); T – температура зони, К; F_{ij} , $i, j = \overline{1, N}$ – матриця середніх кутових коефіцієнтів замкненої системи (6.6).

Рівняння (6.9) можна переписати у виді:

$$q_i = \frac{\varepsilon_i \sigma T_i^4 - (1 - R_i) E_{\text{ef } i}}{R_i}, \quad R_i \neq 0, \quad (6.10)$$

або

$$q_i = \varepsilon_i \sigma T_i^4 - (1 - R_i) \sum_{j=1}^N E_{\text{ef } j} F_{ij}. \quad (6.11)$$

У задачах теплообміну випромінюванням у замкнених системах зазвичай необхідно визначати результуючий тепловий потік для зони з відомою температурою або, навпаки, температуру зони, для якої відома величина густини теплового потоку.

а) *Замкнена система «сірих» тіл*; задані температури поверхонь всіх зон. Якщо задані температури поверхонь всіх зон, а радіаційні властивості не залежать від частоти випромінювання, система рівнянь (6.8) зводиться до системи із N алгебричних рівнянь з N невідомими потоками ефективного випромінювання, $E_{\text{ef } i}$, $i = \overline{1, N}$.

Систему рівнянь (6.8) можна записати у виді:

$$\frac{E_{\text{ef } i}}{\varepsilon_i} - \frac{R_i}{\varepsilon_i} \sum_{j=1}^N E_{\text{ef } j} F_{ij} = \sigma T_i^4, \quad (6.12)$$

або

$$\sum_{j=1}^N \frac{\delta_{ij} - R_i F_{ij}}{\varepsilon_i} E_{\text{ef } j} = \sigma T_i^4, \quad i = \overline{1, N}, \quad (6.13)$$

$$\text{де } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j; \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Систему рівнянь (6.13) прийнято записувати в матричній формі

$$\mathbf{M}\mathbf{E}_{\text{ef}} = \mathbf{T}, \quad (6.14)$$

де

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \cdots & m_{1N} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & \cdots & m_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{N1} & m_{N2} & m_{N3} & \cdots & m_{NN} \end{bmatrix}, \quad (6.15)$$

$$m_{ij} = \frac{\delta_{ij} - R_i F_{ij}}{\varepsilon_i}, \quad (6.16)$$

$$\mathbf{E}_{\text{ef}} = \begin{bmatrix} E_{\text{ef}1} \\ E_{\text{ef}2} \\ \vdots \\ E_{\text{ef}N} \end{bmatrix} \text{ і } \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sigma T_1^4 \\ \sigma T_2^4 \\ \vdots \\ \sigma T_N^4 \end{bmatrix}. \quad (6.17)$$

Із (6.14) отримуємо густину ефективного випромінювання у вигляді

$$\mathbf{E}_{\text{ef}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{T}, \quad (6.18)$$

де \mathbf{M}^{-1} – матриця обернена до \mathbf{M} .

Розв'язок для густини потоків ефективного випромінювання також можна записати у виді

$$E_{\text{ef}i} = \sum_{j=1}^N m'_{ij} \sigma T_j^4, \quad i = \overline{1, N}, \quad (6.19)$$

де m'_{ij} – елементи оберненої матриці.

Основною складністю при використанні даного методу є обчислення матриці кутових коефіцієнтів (6.8). При цьому широко застосовуються їх властивості (6.7).

б) *Замкнена система «сірих» тіл*; для деяких тіл зон задані температури поверхонь, а для решти – густина теплових потоків. Розглянемо замкнену систему, у якій задані температури поверхонь T_i для зон $i = \overline{1, n}$ і густина результуючих потоків q_i для зон $i = \overline{n+1, N}$. Визначимо густину потоків результуючого випромінювання для зон з заданими температурами й температури поверхонь зон, де задані теплові потоки.

Із системи рівнянь (6.8) і (6.9) отримуємо, що:

$$E_{\text{ef } i} = \varepsilon_i \sigma T_i^4 + R_i \sum_{j=1}^N E_{\text{ef } j} F_{ij}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (6.20)$$

$$E_{\text{ef } i} = q_i + \sum_{j=1}^N E_{\text{ef } j} F_{ij}, \quad i = \overline{n+1, N}. \quad (6.21)$$

Рівняння (6.20), (6.21) утворюють систему із N алгебричних рівнянь з N невідомими $E_{\text{ef } i}$, $i = \overline{1, N}$. Після визначення $E_{\text{ef } i}$ у результаті розв'язання цієї системи q_i розраховується для зон $i = \overline{1, n}$ за допомогою (6.9), а температури поверхонь зон $i = \overline{n+1, N}$, для яких були задані q_i , визначаються із (6.8).

Якщо густина потоку результуючого випромінювання дорівнює нулю, наприклад для зони j , то вважають, що $q_j = 0$. Така поверхня називається *невипромінювальною* або *адіабатною*, тому що вона не бере участі в результуючому теплообміні випромінюванням. Адіабатна поверхня веде себе як ідеально відбивальна поверхня (тобто $R_j = 1$ або $\varepsilon_j = 0$), оскільки у такої поверхні поглинута енергія дорівнює випроміненій.

6.1.4. Формули для визначення середніх кутових коефіцієнтів

Для простих геометричних тіл отримані аналітичні співвідношення, які приведені в літературі [24, 25]. Однак, для практичних розрахунків, раціональніше використовувати інтегральні співвідношення для кутових коефіцієнтів, які потім чисельно інтегруються для одержання значень цих коефіцієнтів.

Розглянемо на прикладі циліндра інтегральні співвідношення для визначення середніх по зонах кутових коефіцієнтів (рис. 6.3). Для простоти розуміння розглянемо в циліндрі скінченних розмірів лише три зони (див. рис. 6.3): 1 – нижня основа, 2 – бічна поверхня і 3 – верхня основа.

Середні по зонах кутові коефіцієнти в діатермічній циліндричній порожнині (отримані на основі [25]):

– між основами циліндра

$$F_{1,3} = \frac{4\pi H^2}{A_1} \int_0^R \int_0^R \frac{(H^2 + \rho_1^2 + \rho_2^2) \rho_1 \rho_2}{\left[(H^2 + \rho_1^2 + \rho_2^2)^2 - 4\rho_1^2 \rho_2^2 \right]^{3/2}} d\rho_1 d\rho_2, \quad (6.22)$$

де $A_1 = \pi R^2$ – площа основи циліндра;

– між основою й бічною поверхнею циліндра

$$F_{1,2} = \frac{4\pi R^2}{A_1} \int_0^R \int_0^H \frac{(R^2 + h^2 - \rho^2) h \rho}{\left[(R^2 + \rho^2 + h^2)^2 - 4R^2 \rho^2 \right]^{3/2}} dh d\rho, \quad (6.23)$$

– бічна поверхня сама на себе

$$F_{2,2} = \frac{\pi}{A_2} \int_0^H \int_0^H \left\{ 1 - |h_1 - h_2| \frac{(h_1 - h_2)^2 + 6R^2}{[(h_1 - h_2)^2 + 4R^2]^{3/2}} \right\} dh_1 dh_2, \quad (6.24)$$

де $A_2 = 2\pi RH$ – площа бічної поверхні циліндра.

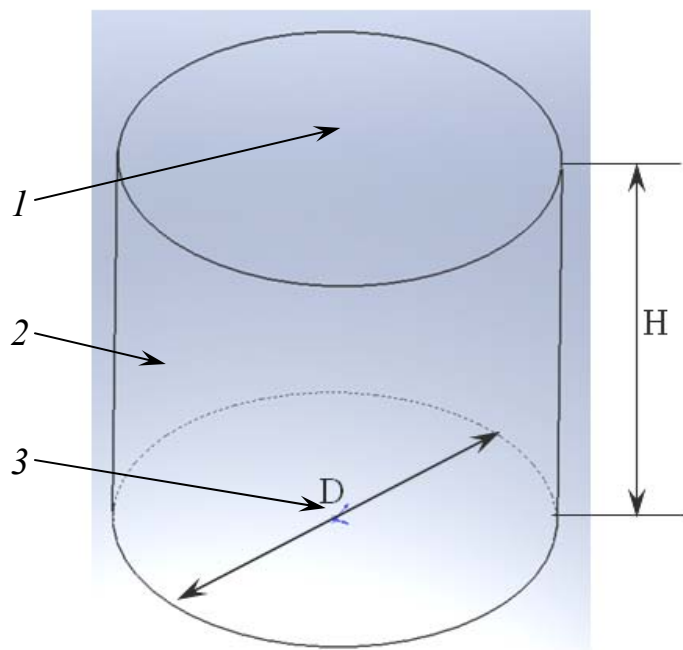


Рис. 6.3. Циліндр скінченних розмірів з дифузними границями, заповнений діатермічним середовищем

Значення середніх кутових коефіцієнтів (6.22)–(6.24) визначаються чисельно послідовним інтегруванням із застосуванням, наприклад, квадратурних формул Гауса або Сімпсона [26].

Приклад застосування спрощеного зонального методу для розрахунків радіаційного теплообміну в циліндрі, що заповнено діатермічним середовищем, з використанням (6.12)–(6.18) і (6.22)–(6.24) приведено у файлі *Cylinder_diaterm.xmcd* для системи Mathcad.

6.2. Зональний метод. Теплообмін випромінюванням між твердими тілами, розділеними напівпрозорим середовищем

6.2.1. Загальні відомості

Згідно зонального методу, неізотермічне середовище (газ) та замикаюча його оболонка розділяється на ряд об'ємів і площадок, які можуть вважатися близькими до ізотермічних. Далі для кожної площадки та об'єму записуються

рівняння балансу енергії. При цьому отримується система рівнянь відносно невідомої густини теплових потоків або температури, як це було описано для зонального методу в діатермічному середовищі в попередньому пункті. Цей метод не є елегантним у формальному математичному сенсі, але на практиці він дуже корисний. Достатньо детальний опис цього методу проведений Хоттелом, Коеном та Ейнштейном [24, 25]. Цей метод також розповсюджується на задачі, у яких також враховується теплопровідність і конвекція [24].

Зональний метод має переваги, наприклад, перед методом Кертиса–Годсона, які полягають у тому, що цим методом можна розв'язувати задачі з невідомим розподілом температури у газі.

Розглянемо основні положення зонального методу для напівпрозорого середовища, коефіцієнт поглинання (K , м^{-1}) і показник заломлення (n) якого постійні величини ($K, n = \text{const}$), а коефіцієнт розсіювання середовища дорівнює нулю, внутрішні джерела теплоти відсутні. Таким чином напівпрозоре середовище є «сірим» випромінювальним, поглинальним і нерозсіювальним. Розглянемо об'єм середовища (газу) V_γ (рис. 6.4) і поверхню A_k .

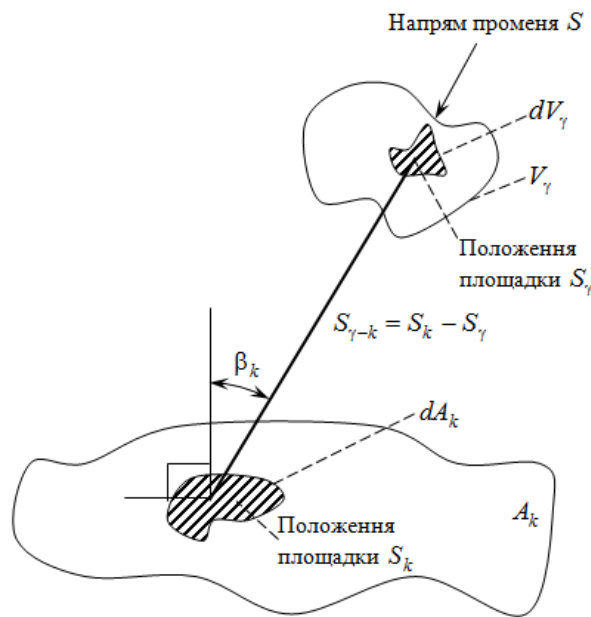


Рис. 6.4. Випромінювання об'єму газу V_γ на поверхню A_k

Густина потоку випромінювання елемента об'єму dV_γ дорівнює $4Kn^2\sigma T_\gamma^4 dV_\gamma$ або на одиницю тілесного кута, який включає dV_γ , дорівнює $(Kn^2\sigma T_\gamma^4 / \pi) dV_\gamma$. Якщо дивитись зі сторони елемента об'єму dV_γ , то елемент поверхні dA_k стягує тілесний кут $dA_k \cos \beta_k / S_{\gamma-k}^2$. Частка випромінювання, яка проходить по довжині шляху променя $S_{\gamma-k}$, дорівнює

$$\exp[-K(S_\gamma - S_k)] = \tau(S_{\gamma-k}).$$

Перемножуючи ці величини та інтегруючи по V_γ і A_k , отримуємо густину падаючого випромінювання на поверхню A_k із об'єму газу V_γ

$$\begin{aligned} q_{\text{пад } k} A_k &= \int_{V_\gamma} \int_{A_k} \frac{Kn^2 \sigma T_\gamma^4 \cos \beta_k}{\pi S_{\gamma-k}^2} \tau(S_{\gamma-k}) dA_k dV_\gamma = \\ &= \frac{Kn^2 \sigma T_\gamma^4}{\pi} \int_{V_\gamma} \int_{A_k} \frac{\cos \beta_k}{S_{\gamma-k}^2} \tau(S_{\gamma-k}) dA_k dV_\gamma. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Визначимо тепер взаємну поверхню обміну випромінюванням між газом і поверхнею у виді

$$\overline{v_\gamma S_k} = \frac{K}{\pi} \int_{V_\gamma} \int_{A_k} \frac{\cos \beta_k}{S_{\gamma-k}^2} \tau(S_{\gamma-k}) dA_k dV_\gamma. \quad (6.26)$$

Тоді рівняння (6.25) можна записати у виді

$$q_{\text{пад } k} A_k = \overline{v_\gamma S_k} n^2 \sigma T_\gamma^4. \quad (6.27)$$

Отже, потік випромінювання, який падає на A_k , може вважатися потоком випромінювання чорного тіла σT_γ^4 , помноженого на n^2 для середовища об'ємом V_γ випромінюваного з ефективної поверхні $\overline{v_\gamma S_k}$.

Нехай об'єм газу поділено на N_v скінченних об'ємів. Густина потоку випромінювання, що потрапляє на елемент поверхні A_k від усіх цих об'ємів, дорівнює

$$q_{\text{пад } k} \Big|_{\text{від об'єму}} = \frac{1}{A_k} \sum_{\gamma=1}^{N_v} \overline{v_\gamma S_k} n^2 \sigma T_\gamma^4 = \sum_{\gamma=1}^{N_v} n^2 \sigma T_\gamma^4 F_{vs_{k\gamma}}, \quad (6.28)$$

де $F_{vs_{k\gamma}} = \frac{\overline{v_\gamma S_k}}{A_k}$ – називається коефіцієнтом опромінення (КО) між об'ємом газу й поверхнею, б/р.

Розглянемо тепер теплообмін випромінюванням між граничними поверхнями оболонки. Потік випромінювання, що розповсюджується від поверхні A_j до поверхні A_k у випадку неізотермічного газу, який має постійні властивості «сірого» газу, дорівнює

$$q_{\text{пад } k} A_k = \frac{E_{\text{ef } j}}{\pi} \int_{A_k} \int_{A_j} \frac{\cos \beta_j \cos \beta_k}{S_{j-k}^2} \tau(S_{j-k}) dA_j dA_k, \quad (6.29)$$

де $E_{\text{ef } j}$ – ефективний потік, що випромінюється поверхнею A_j . Визначимо тепер взаємну поверхню пари тіл у вигляді

$$\overline{s_j s_k} = \int_{A_k} \int_{A_j} \frac{\cos \beta_j \cos \beta_k}{\pi S_{j-k}^2} \tau(S_{j-k}) dA_j dA_k. \quad (6.30)$$

Тоді рівняння (6.29) можна записати таким чином

$$q_{\text{пад } k} A_k = \overline{s_j s_k} E_{\text{ef } j}. \quad (6.31)$$

Отже, потік випромінювання $q_{\text{пад } k} A_k$ від A_j до A_k дорівнює добутку густини потоку ефективного випромінювання $E_{\text{ef } j}$, який виходить з A_j , на ефективну площу $\overline{s_j s_k}$. Потік випромінювання, що падає на площадку A_k від усіх N_s граничних поверхонь, дорівнює

$$q_{\text{пад } k} \Big|_{\text{від поверхні}} = \frac{1}{A_k} \sum_{j=1}^{N_s} \overline{s_j s_k} E_{\text{ef } j} = \sum_{j=1}^{N_s} F_{SS_{kj}} E_{\text{ef } j}, \quad (6.32)$$

де $F_{SS_{kj}} = \frac{\overline{s_j s_k}}{A_k}$ – називається КО між поверхнями, б/р.

Тоді загальний потік випромінювання, що падає на поверхню A_k з N_s поверхонь і N_v об'ємів може бути записаний у виді

$$q_{\text{пад } \Sigma k} = q_{\text{пад } k} \Big|_{\text{від поверхні}} + q_{\text{пад } k} \Big|_{\text{від об'єму}} = \sum_{j=1}^{N_s} F_{SS_{kj}} E_{\text{ef } j} + \sum_{\gamma=1}^{N_v} n^2 \sigma T_\gamma^4 F_{\nu S_{k\gamma}}. \quad (6.33)$$

Для поверхні A_k можуть бути застосовані звичайні рівняння для результуючого випромінювання (як у спрощеному зональному методі для прозорого середовища):

$$q_k = E_{\text{ef } k} - q_{\text{пад } \Sigma k}, \quad (6.34)$$

$$E_{\text{ef } k} = \varepsilon_k n^2 \sigma T_k^4 + R_k q_{\text{пад } \Sigma k}. \quad (6.35)$$

У тих задачах, у яких температура T_γ задана для всіх елементарних об'ємів газу V_γ , рівнянь (6.33)–(6.35) достатньо для розв'язання задачі зі знаходження невідомих значень T_k або q_k , або відносно деякої комбінації із N_s величин T_k і q_k . Інші із N_s значень T_k і q_k повинні бути задані у вигляді ГУ.

Значення $\overline{s_j s_k}$ і $\overline{v_\gamma s_k}$ табульовані Хоттелем і Коеном [24] для ізотермічних об'ємів кубічної форми з ізотермічними граничними поверхнями. Хоттель і Серофім приводять довідкову таблицю коефіцієнтів для 11-ти об'ємів інших конфігурацій і велику кількість табличних даних для об'ємів циліндричної форми.

Якщо невідомі температури T_γ для N_v об'ємів напівпрозорого середовища, то слід знайти N_v додаткових рівнянь. Вони отримуються шляхом складання балансу енергії елементарного об'єму напівпрозорого середовища. При радіаційній рівновазі випромінювання й поглинання в кожному елементарному об'ємі середовища V_γ однакові (у середовищі немає джерел теплоти). Тоді для «сірого» середовища з постійними властивостями рівняння теплового балансу в об'ємі V_γ буде таким

$$4Kn^2 \sigma T_\gamma^4 V_\gamma = \sum_{\gamma=1}^{N_v} Kn^2 \sigma T_{\gamma^*}^4 \int \int_{V_\gamma V_{\gamma^*}} \frac{K \tau(S_{\gamma^*-\gamma})}{\pi S_{\gamma^*-\gamma}^2} dV_{\gamma^*} dV_\gamma + \\ + \sum_{k=1}^{N_s} E_{\text{ef } k} \int \int_{V_\gamma A_k} \frac{\cos \beta_k}{\pi S_{k-\gamma}^2} K \tau(S_{k-\gamma}) dA_k dV_\gamma. \quad (6.36)$$

Вважається, що величина K є однаковою у всьому замкненому об'ємі і, що об'єми V_γ і V_{γ^*} є ізотермічними. Величину $E_{\text{ef } k}$, як і зазвичай, беруть постійною на поверхні A_k .

Визначимо взаємну поверхню теплообміну випромінюванням між поверхнею й середовищем у виді

$$\overline{s_k v_\gamma} = \int \int_{V_\gamma A_k} \frac{\cos \beta_k}{\pi S_{k-\gamma}^2} K \tau(S_{k-\gamma}) dA_k dV_\gamma. \quad (6.37)$$

Порівняння (6.26) і (6.37) показує, що існує співвідношення взаємності між поверхнями обміну поверхня–об'єм та об'єм–поверхня

$$\overline{s_k v_\gamma} = \overline{v_\gamma s_k}. \quad (6.38)$$

Визначимо взаємну поверхню теплообміну випромінюванням між двома об'ємами напівпрозорого середовища у виді

$$\overline{v_{\gamma^*} v_\gamma} = \int \int_{V_\gamma V_{\gamma^*}} \frac{K^2 \tau(S_{\gamma^*-\gamma})}{\pi S_{\gamma^*-\gamma}^2} dV_{\gamma^*} dV_\gamma. \quad (6.39)$$

Підставляючи (6.37)–(6.39) у (6.36), отримуємо

$$4Kn^2\sigma T_\gamma^4 V_\gamma = \sum_{\gamma=1}^{N_v} n^2 \sigma T_\gamma^4 \overline{v_{\gamma*} v_\gamma} + \sum_{k=1}^{N_s} E_{ef\ k} \overline{s_k v_\gamma}. \quad (6.40)$$

Величини $\overline{v_{\gamma*} v_\gamma}$ також табульовані [24], так що рівняння (6.40) для кожного об'єму V_γ дає додаткову систему із N_v рівнянь, яка необхідна для розрахунку розподілу температури в напівпрозорому середовищі.

Рівняння (6.34), (6.35) і (6.40) можна переписати у вигляді системи рівнянь зручному для числової реалізації

$$\begin{cases} \frac{\sum_{j=1}^{N_s} (\delta_{ij} - R_i F_{ss_{ij}}) E_{ef\ j}}{\epsilon_i} - \frac{R_i}{\epsilon_i} \sum_{k=1}^{N_v} n^2 \sigma T_k^4 F_{vs_{ik}} = n^2 \sigma T_i^4, \quad i = \overline{1, N_s}; \\ 4Kn^2 \sigma T_l^4 = \sum_{k=1}^{N_v} Kn^2 \sigma T_k^4 F_{vv_{lk}} + \sum_{j=1}^{N_s} F_{sv_{lj}} E_{ef\ j}, \quad l = \overline{1, N_v}, \end{cases} \quad (6.41)$$

де $F_{sv_{lj}} = \frac{A_j}{V_l} F_{vs_{jl}}$ – КО поверхня-об'єм, 1/м; $F_{vv_{lk}} = \int \int_{V_l V_k} \frac{K\tau(S_{lk})}{\pi S_{lk}^2} dV_k dV_l$ – КО об'єм-об'єм, 1/м.

6.2.2. Приклад формул для визначення КО

Для простих геометричних тіл отримано табульовані значення, які приведені в літературі [24]. Однак, для практичних розрахунків, раціональніше використовувати інтегральні співвідношення для КО, які потім чисельно інтегруються для отримання числових значень цих коефіцієнтів.

Розглянемо на прикладі циліндра інтегральні співвідношення для визначення КО (рис. 6.5). Для спрощення розуміння методу розглянемо в циліндрі скінченних розмірів тільки три поверхневі зони (див. рис. 6.5) та один об'єм: 1 – нижню основу, 2 – бічну поверхню і 3 – верхню основу.

Формули для визначення КО в циліндрі скінченних розмірів такі:

– КО – основа на основу циліндра

$$F_{ss_{ij}} = \frac{4H^2}{A_i} \int_0^R \int_0^R \int_0^\pi \frac{e^{-KS}}{S^4} \rho_1 \rho_2 d\theta d\rho_1 d\rho_2, \quad \text{б/р}, \quad (6.42)$$

де $A_i = \pi R^2$ – площа поверхні циліндра, м²;

$$S = \sqrt{H^2 + \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1 \rho_2 \cos \theta};$$

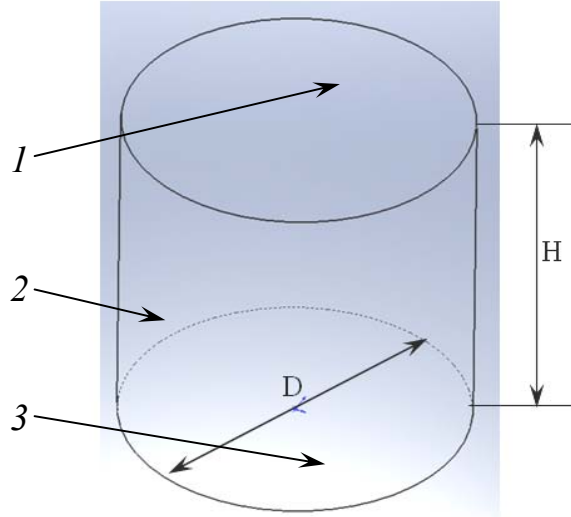


Рис. 6.5. Циліндр скінченних розмірів з дифузними границями, заповнений напівпрозорим середовищем

– КО – основа на бічну поверхню циліндра

$$F_{ss_{ij}} = \frac{4R}{A_i} \int_0^H \int_0^R \int_0^\pi \frac{e^{-KS}}{S^4} [R - \rho \cos \theta] \rho h d\theta d\rho dh, \quad \text{б/р}, \quad (6.43)$$

де $A_i = \pi R^2$, м²; $S = \sqrt{h^2 + R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \theta}$;

– КО – бічна поверхня на бічну поверхню циліндра

$$F_{ss_{ij}} = \frac{4R^4}{A_i} \int_0^H \int_0^H \int_0^\pi \frac{e^{-KS}}{S^4} [1 - \cos \theta]^2 d\theta dh_1 dh_2, \quad \text{б/р}, \quad (6.44)$$

де $A_i = 2\pi RH$ – площа бічної поверхні циліндра, м²;

$S = \sqrt{(h_1 - h_2)^2 + 2R^2(1 - \cos \theta)}$;

– КО – об'єм на основу циліндра

$$F_{vs_{il}} = \frac{4K}{A_i} \int_0^H \int_0^R \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{e^{-KS}}{S^3} (H - h) \rho_1 \rho_2 d\theta d\rho_1 d\rho_2 dh, \quad \text{б/р}, \quad (6.45)$$

де $A_i = \pi R^2$, м²; $S = \sqrt{(H - h)^2 + \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1 \rho_2 \cos \theta}$;

– КО – об'єм на бічну поверхню циліндра

$$F_{vs_{ij}} = \frac{4KR}{A_i} \int_0^H \int_0^H \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{e^{-KS}}{S^3} [R - \rho \cos \theta] \rho d\theta d\rho dh_1 dh_2, \quad \text{б/р}, \quad (6.46)$$

де $A_i = 2\pi RH$, м²; $S = \sqrt{(h_1 - h_2)^2 + R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \theta}$;

– КО – поверхні на об'єм визначаються із умов взаємності

$$Fsv_{lk} = \frac{A_k}{V_l} Fvs_{kl} - \text{КО поверхня-об'єм, } 1/\text{м}, \quad (6.47)$$

де $V = \pi R^2 H$ – об'єм циліндра, м^3 ;

– КО об'єм-об'єм циліндра

$$Fvv_{ij} = \frac{4K}{V_i} \int_0^H \int_0^H \int_0^R \int_0^R \frac{e^{-KS}}{S^3} \rho_1 \rho_2 d\theta d\rho_1 d\rho_2 dh_1 dh_2, \quad 1/\text{м}, \quad (6.48)$$

де $S = \sqrt{(h_1 - h_2)^2 + \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1 \rho_2 \cos \theta}$.

Система рівнянь для визначення густини ефективного потоку випромінювання з поверхонь циліндра, заповненого напівпрозорим середовищем (див. рис. 6.5), і середньої температури його об'єму T_v записується у вигляді

$$\begin{cases} \frac{\sum_{j=1}^3 (\delta_{ij} - R_i Fss_{ij}) E_{efj}}{\varepsilon_i} - \frac{R_i}{\varepsilon_i} n^2 \sigma T_v^4 Fvs_i = n^2 \sigma T_i^4, \quad i = \overline{1,3}; \\ -Fsv_j E_{efj} + Kn^2 \sigma T_v^4 (4 - Fvv) = 0, \quad j = \overline{1,3}. \end{cases} \quad (6.49)$$

Обмеження (6.49): дискретний об'єм повинен бути таким, щоб виконувалась умова

$$Kn^2 \sigma T_v^4 (4 - Fvv) > 0.$$

КО (6.42)–(6.48) визначаються чисельно послідовним інтегруванням з використанням, наприклад, квадратурних формул Гауса або Сімпсона [26].

Приклад застосування зонального методу для розрахунків радіаційного теплообміну в циліндрі, що заповнено напівпрозорим середовищем, з використанням (6.42)–(6.49) наведено у файлі *Cylinder_absorption.xmcd* для системи Mathcad.

6.3. Наближені методи розв'язання рівняння переносу випромінювання. Диференціальне наближення. Метод моментів. Наближення оптично тонкого і товстого шарів

6.3.1. Загальні відомості

За допомогою диференціального наближення інтегральне рівняння переносу випромінювання в поглинальному й випромінювальному середовищі зводиться до диференціальних рівнянь шляхом апроксимації рівняння переносу

су скінченним рядом рівнянь моментів. Моменти отримують шляхом множення рівняння переносу на степені косинуса кута, що знаходиться між віссю координат і напрямком інтенсивності випромінювання.

Метод моментів (Крук) і метод дискретних ординат (Чандрасекар) дозволяють отримувати наближений розв'язок рівняння переносу випромінювання більш високого порядку, наприклад, порівняно із зональним методом і P_1 наближенням. Як це було показано Круком, метод моментів і метод дискретних ординат є еквівалентними.

Розглянемо метод моментів низького порядку. Запишемо рівняння переносу випромінювання у виді

$$\frac{dI(s, \Omega)}{ds} + \beta I(s, \Omega) = KI_b(T) + \frac{\sigma_s}{4\pi} \int_{4\pi} I(s, \Omega') d\Omega', \quad (6.50)$$

де s – довжина шляху, що вимірюється вздовж напрямку розповсюдження випромінювання; I – інтенсивність випромінювання вздовж s у тілесному куті Ω ; $I_b = \frac{n^2 \sigma T^4}{\pi}$ – інтенсивність випромінювання абсолютно чорного тіла, Вт/(м²·ср); σ – стала Стефана-Больцмана, Вт/(м²·К⁴); n – показник заломлення середовища; $\beta = K + \sigma_s$ – коефіцієнт ослаблення середовища, м⁻¹; K – коефіцієнт поглинання середовища, м⁻¹; σ_s – коефіцієнт розсіювання середовища, м⁻¹.

Похідна за напрямком d/ds у прямокутній системі координат пов'язана з частинними похідними по x, y, z співвідношенням

$$\frac{d}{ds} = l \frac{\partial}{\partial x} + m \frac{\partial}{\partial y} + n \frac{\partial}{\partial z}, \quad (6.51)$$

де l, m, n – направляючі косинуси вектора Ω , що дорівнюють

$$l = \sin \theta \cos \varphi, \quad m = \sin \theta \sin \varphi, \quad n = \cos \theta. \quad (6.52)$$

Тут θ – полярний кут, який відрховується від позитивного напрямку осі z ; φ – азимутальний кут. Підставивши (6.51) і (6.52) у (6.50), отримуємо

$$\left(l \frac{\partial I}{\partial x} + m \frac{\partial I}{\partial y} + n \frac{\partial I}{\partial z} \right) + \beta I = KI_b(T) + \frac{\sigma_s}{4\pi} \int_{4\pi} I d\Omega, \quad (6.53)$$

де $I = I(x, y, z, l, m, n)$.

Представимо інтенсивність випромінювання у виді

$$I(x, y, z, l, m, n) = I_0(x, y, z) + a(x, y, z)l + b(x, y, z)m + c(x, y, z)n$$

або у більш стислому запису

$$I = I_0 + al + bm + cn, \quad (6.54)$$

де I_0, a, b, c – шукані функції лише одних координат.

Підставивши (6.54) у (6.53) і виконавши інтегрування отриманого виразу по всіх тілесних кутах (тобто в межах $\Omega = 4\pi$), отримаємо

$$\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} = 3K[I_b(T) - I_0], \quad (6.55)$$

де

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial I_0}{\partial x}; \\ b = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial I_0}{\partial y}; \\ c = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial I_0}{\partial z}. \end{cases} \quad (6.56)$$

Співвідношення (6.56) дозволяють зв'язати коефіцієнти a, b, c з функцією I_0 . Підстановка формул (6.56) у (6.55) дає такі вирази для інтенсивності випромінювання $I(x, y, z, l, m, n)$ залежно від функції $I_0(x, y, z)$

$$I(x, y, z, l, m, n) = I_0(x, y, z) - \frac{1}{\beta} \left(l \frac{\partial I_0}{\partial x} + m \frac{\partial I_0}{\partial y} + n \frac{\partial I_0}{\partial z} \right) \quad (6.57)$$

Таким чином, якщо функція $I_0(x, y, z)$ відома, то із (6.57) можна отримати розподіл інтенсивності випромінювання.

Підставляючи (6.57) у (6.56), отримуємо наступне диференціальне рівняння у частинних похідних відносно $I_0(x, y, z)$

$$\frac{1}{\beta} \nabla^2 I_0(x, y, z) = 3K[I_0(x, y, z) - I_b(T)], \quad (6.58)$$

$$\text{де } \nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right).$$

Просторову густину випромінювання G , що падає на поверхню, можна зв'язати з функцією $I_0(x, y, z)$, тому що вона дорівнює інтегралу від I по повному тілесному куту, тобто:

$$G = \int_{4\pi} I d\Omega = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} (I_0 + al + bm + cn) \sin \theta d\theta d\varphi = 4\pi I_0, \quad (6.59)$$

або

$$I_0 = \frac{G}{4\pi}. \quad (6.60)$$

Підстановка (6.60) у (6.58) дає

$$\frac{1}{\beta} \nabla^2 G(x, y, z) = 3K[G(x, y, z) - 4\pi I_b(T)] \quad (6.61)$$

Для одновимірного плоского шару рівняння (6.61) спрощується

$$\frac{1}{\beta} \frac{d^2 G(z)}{dz^2} = 3K[G(z) - 4\pi I_b(T)] \quad (6.62)$$

або

$$\frac{d^2 G}{d\tau^2} = 3(1 - \omega)[G - 4\pi I_b(T)] \quad (6.63)$$

де $d\tau = \beta dz$ і $1 - \omega = \frac{K}{\beta}$.

Вираз (6.63) співпадає з рівнянням, яке отримано за допомогою P_1 -наближення.

У задачах про взаємодію випромінювання з теплопровідністю й конвекцією рівняння енергії включає член, пов'язаний з дивергенцією густини потоку випромінювання виду $\nabla \cdot \mathbf{q}^r$, який може бути пов'язаний з I_0 або G таким чином

$$\nabla \cdot \mathbf{q}^r = \int_{4\pi} \nabla \cdot \Omega I d\Omega, \quad (6.64)$$

$$\text{де } \nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (6.65)$$

$$\Omega = \mathbf{i}l + \mathbf{j}m + \mathbf{k}n, \quad I = I_0 + al + bm + cn. \quad (6.66)$$

або з врахуванням (6.60)

$$\nabla \cdot \mathbf{q}^r = -\frac{1}{3\beta} \nabla^2 G. \quad (6.67)$$

Диференціальне наближення 1-го порядку для рівняння переносу для випромінювального і поглинального «сірого» середовища може бути представлено у виді

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{K} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial q_j}{\partial x_k} \right) - 4\sigma \frac{\partial T^4}{\partial x_k} - 3Kq_k = 0, \quad k = \overline{1,3}. \quad (6.68)$$

6.3.2. Граничні умови

Розглянемо «сіру» границю A_j , яка розташована перпендикулярно до x_j (рис. 6.6). Густина потоку випромінювання, яке покидає A_j у напрямку додатних значень x_j , дорівнює

$$q_{0,j} = \varepsilon_j \sigma T_j^4 + (1 - \varepsilon_j) q_{i,j}, \quad (6.69)$$

де q_0, q_i – густина потоків ефективного й випромінювання, що падає. Однак, $q_{i,j}$ дорівнює густині потоку випромінювання в середовищі поблизу стінки, яке поширюється у від’ємному напрямку (див. рис. 6.6).

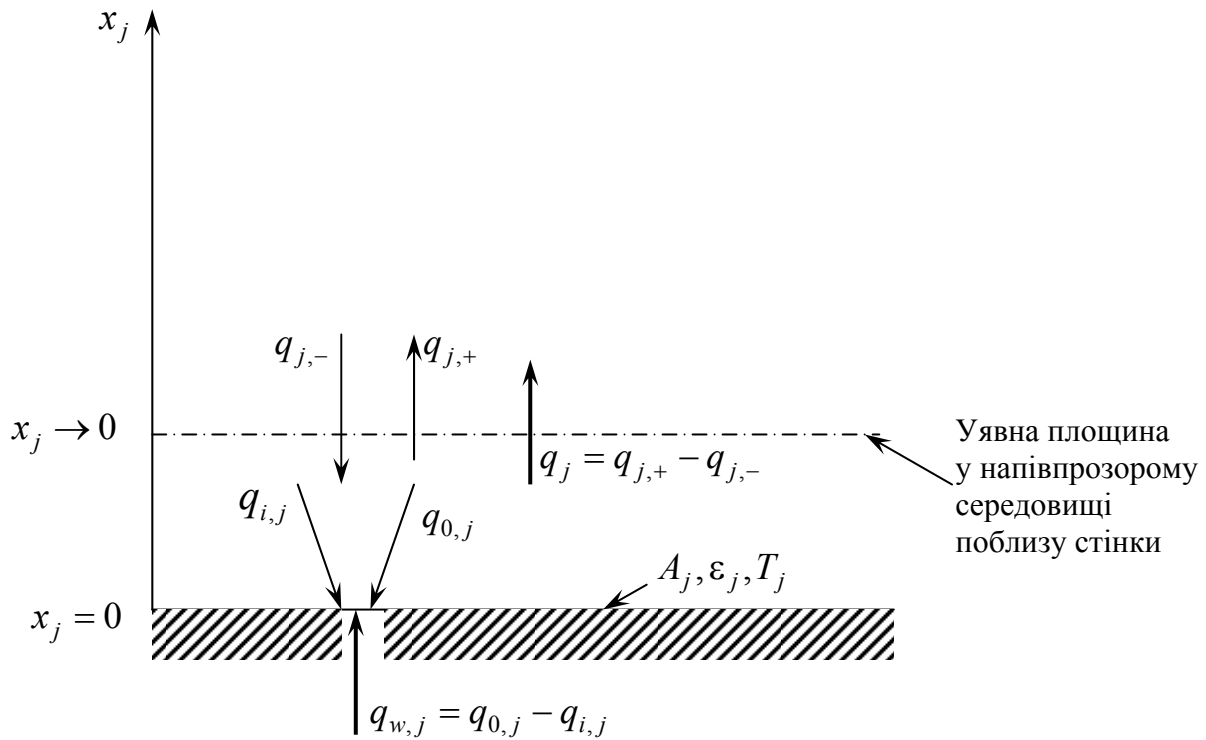


Рис. 6.6. Густина теплових потоків поблизу граничної поверхні

$$q_{i,j} = q_{j,-(x_j \rightarrow 0)} \text{ або } q_{i,j} = -q_{j(x_j \rightarrow 0)} + q_{0,j}.$$

Із врахуванням останнього (6.69) перепишеться у виді

$$q_{0,j} = \varepsilon_j \sigma T_j^4 + (1 - \varepsilon_j) [q_{i,j} = -q_{j(x_j \rightarrow 0)} + q_{0,j}]. \quad (6.70)$$

Остаточно гранична умова (6.70) при $j=1$ і при $x_1 \perp A_j$ записується у виді

$$\left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{2} \right) q_{1(x_1 \rightarrow 0)} - \frac{1}{4K} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial q_j}{\partial x_j} \bigg|_{(x_1 \rightarrow 0)} = \sigma [T_1^4 - T_{(x_1 \rightarrow 0)}^4]. \quad (6.71)$$

Рівняння (6.68) і (6.71) представляють собою рівняння переносу випромінювання і граничну умову, що записані у рамках диференціального наближення.

6.3.3. Приклад застосування диференціального наближення

Розглянемо паралельні нескінченні «сірі» пластини, що розташовані на відстані D . Ступені чорноти пластин ε_{w1} і ε_{w2} , а температури T_{w1} і T_{w2} . Простір між пластинами заповнено «сірим» газом. Оскільки густина потоку випромінювання в газі не залежить від x і y і постійна вздовж осі z , то із умови збереження енергії всі $\partial q_j / \partial x_j = 0$. У цьому випадку рівняння (6.68) перетворюється до виду

$$q_z = -\frac{4\sigma}{3K} \frac{\partial T^4}{\partial z}. \quad (6.72)$$

Гранична умова при $z=0$ приймає вид

$$\left(\frac{1}{\varepsilon_{w1}} - \frac{1}{2} \right) q_z = \sigma [T_{w1}^4 - T_{g(z \rightarrow 0)}^4], \quad (6.73)$$

де індекс g означає, що температура відноситься до газу.

При $z=D$

$$-\left(\frac{1}{\varepsilon_{w2}} - \frac{1}{2} \right) q_z = \sigma [T_{w2}^4 - T_{g(z \rightarrow D)}^4] \quad (6.74)$$

Знак мінус тут з'явився у зв'язку з тим, що напрямок нормалі від поверхні до газу відповідає від'ємному напрямку z .

6.3.4. Осереднення коефіцієнтів поглинання

Середню величину поглинальної спроможності речовини α можна визначити у виді

$$\alpha = \frac{\int_{\lambda=0}^{\infty} \alpha_{\lambda} I_{\lambda b}(T) d\lambda}{\int_{\lambda=0}^{\infty} I_{\lambda b}(T) d\lambda} = \frac{\int_{\lambda=0}^{\infty} \alpha_{\lambda} I_{\lambda b}(T) d\lambda}{I_b(T)}. \quad (6.75)$$

Розіб'ємо спектр на M інтервалів, так щоб у межах кожного інтервалу α_{λ} можна було вважати сталою. Тоді інтеграл (6.75) замінюється сумою виду

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\sum_{m=1}^M \alpha_m \int_{\lambda_{m-1}}^{\lambda_m} I_{\lambda b}(T) d\lambda}{I_b(T)} = \sum_{m=1}^M \alpha_m \left[\frac{\int_0^{\lambda_m} I_{\lambda b}(T) d\lambda}{I_b(T)} - \frac{\int_0^{\lambda_{m-1}} I_{\lambda b}(T) d\lambda}{I_b(T)} \right] = \\ &= \sum_{m=1}^M \alpha_m [f_{0-\lambda_m}(T) - f_{0-\lambda_{m-1}}(T)] \end{aligned} \quad (6.76)$$

де α_m – середнє значення α_{λ} в інтервалі довжини хвилі від λ_{m-1} до λ_m . Тобто, за допомогою функції випромінювання 1-го роду $f_{0-\lambda_m}(T)$ інтегрування вдається замінити сумуванням.

Як приклад використання функції випромінювання 2-го роду розглянемо обчислення середнього за Роселандом коефіцієнта послаблення β_R , який визначається співвідношенням

$$\frac{1}{\beta_R} = \int_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1}{\beta_{\lambda}} \frac{\partial I_{\lambda b}(T)}{\partial I_b(T)} d\lambda, \quad (6.77)$$

де β_{λ} – спектральний коефіцієнт ослаблення речовини.

Розіб'ємо спектр на M інтервалів, так щоб у межах кожного з них β_{λ} можна було вважати сталим.

Тоді вираз (6.77) можна записати у виді

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta_R} &= \sum_{m=1}^M \frac{1}{\beta_m} \int_{\lambda_{m-1}}^{\lambda_m} \frac{\partial I_{\lambda b}(T)}{\partial I_b(T)} d\lambda = \sum_{m=1}^M \frac{1}{\beta_m} \left[\int_0^{\lambda_m} \frac{\partial I_{\lambda b}(T)}{\partial I_b(T)} d\lambda - \int_0^{\lambda_{m-1}} \frac{\partial I_{\lambda b}(T)}{\partial I_b(T)} d\lambda \right] = \\ &= \sum_{m=1}^M \frac{1}{\beta_m} [f_{0-\lambda_m}^*(T) - f_{0-\lambda_{m-1}}^*(T)] \end{aligned} \quad (6.78)$$

де β_m – середнє значення β_λ в інтервалі довжини хвилі $\lambda_{m-1} - \lambda_m$. Таким чином, за допомогою функції випромінювання 2-го роду можна замінити інтегрування сумуванням. Ці функції табульовані й приведені в літературних джерелах [24, 25].

Аналогічним способом можна усереднити спектральну ступінь чорноти й коефіцієнт відбиття граничних поверхонь і користуватись «сірим» наближенням при виконанні розрахунків радіаційного теплообміну.

6.3.5. Наближення оптично тонкого і товстого шару

Наближення оптично тонкого шару базується на припущенні, що оптична товщина середовища надзвичайно мала, тобто $\tau_0 = KL \ll 1$.

Результуючий потік випромінювання в цьому випадку визначається по таких самих співвідношеннях, як і у випадку потоку результуючого випромінювання між непрозорими пластинами, що розділені прозорим середовищем

$$q = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{[(1/\varepsilon_1) + (1/\varepsilon_2) - 1]}. \quad (6.79)$$

Середовище називається оптично товстим, якщо середня довжина пробігу фотона (тобто величина обернена коефіцієнту ослаблення) мала відносно її характерного розміру. Це наближення, відоме також під назвою наближення Роселанда або дифузного наближення. Головна перевага цього наближення полягає в тому, що воно дає дуже простий вираз для густини потоку результуючого випромінювання

$$q = -k_r \frac{dT}{dz}, \quad (6.80)$$

$$\text{де } k_r = \frac{16n^2\sigma T^3}{3K}. \quad (6.81)$$

Коефіцієнт k_r називають коефіцієнтом радіаційної теплопровідності за аналогією з відомим у теорії теплопровідності коефіцієнтом теплопровідності.

6.4. Метод граничних елементів

Багато задач радіаційного теплообміну між твердими тілами складної форми, що розділені діатермічним середовищем, не мають прямого аналітичного розв'язку. Тому для розв'язання таких задач використовуються числові методи: зональний, Монте-Карло тощо. Однак для задач з дифузними границями може бути ефективно застосований метод граничних елементів.

На практиці значний інтерес представляють задачі, у яких враховується

складний теплообмін, наприклад, стаціонарний радіаційний і кондуктивний теплообмін без і з взаємодією між собою. Методика числового розв'язання задач кондуктивного теплообміну на базі МГЕ представлена в працях [17–19], а для ефективного розв'язання задач радіаційного теплопереносу і складного теплообміну треба вирішити деякі проблеми, пов'язані із:

- визначенням коефіцієнтів впливу радіаційного теплообміну діатермічної порожнини, оточеної непрозорими дифузно-відбивальними границями;
- врахуванням при обчисленні коефіцієнтів впливу ефекту екранування променів;
- спільного розв'язання системи нелінійних рівнянь, які описують кондуктивний і радіаційний механізми теплопереносу.

6.4.1. Постановка задачі

Нехай $\Omega = \bigcup_{\ell=1}^W \Omega_{\ell} \in R^3$ область, яка складається з множин Ω_{ℓ} (елементів конструкції промислового устаткування), границі яких є об'єднання кусково-плоских множин $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_4$. Причому при $\ell = \overline{1, m}$, $m < W$ розглядаються тверді тіла, у яких відбувається теплообмін теплопровідністю, а при $\ell = \overline{m+1, W}$ – діатермічні порожнини, між границями яких діє радіаційний механізм теплообміну. У теплопровідних тілах для врахування границі тверде тіло-розплав використовується узагальнена постановка задачі. На Γ_0 розглядаються зовнішні границі конструкції з трьома типами граничних умов (ГУ), а на Γ_4 – об'єднання контактів між різними елементами конструкції. Оскільки на Γ_0 задаються різні ГУ, то її також можна представити у вигляді об'єднань: $\Gamma_0 = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, де Γ_1 – об'єднання границь з ГУ Дирихле, Γ_2 – об'єднання границь з ГУ Неймана, Γ_3 – об'єднання границь з ГУ конвективного типу. Завдяки наявності радіаційного теплообміну границя Γ_4 є також об'єднаною: $\Gamma_4 = \Gamma_{4T} \cup \Gamma_{4TR}$, де Γ_{4T} – об'єднання контактів виключно між різними теплопровідними тілами Ω , Γ_{4TR} – об'єднання границь контакту між діатермічними порожнинами та теплопровідними елементами конструкції.

Виходячи з вищеприведеного, поле температури T в Ω з врахуванням складного теплообміну можна описати такою системою рівнянь з відповідними граничними умовами:

$$\Omega_\ell : \begin{cases} \operatorname{div}[\lambda_\ell(T)\nabla T(X)] + q_{v\ell}(X) = 0, & (\ell = \overline{1, m}) \\ \sigma T_{X_1}^4 - \int_F \sigma T_x^4 \frac{\cos \varphi_{X_2} \cos \varphi_{X_1}}{\pi |X_2 - X_1|^2} \beta(X_1, X_2) dF_{X_2} = \\ = \frac{1}{\varepsilon_{X_1}} q_r(X_1) - \int_F \frac{1 - \varepsilon_{X_2}}{\varepsilon_{X_2}} q_r(X_2) \frac{\cos \varphi_{X_2} \cos \varphi_{X_1}}{\pi |X_2 - X_1|^2} \beta(X_1, X_2) dF_{X_2}, & (\ell = \overline{m+1, W}) \end{cases} \quad (6.82)$$

$$\Omega_{\ell w} : \lambda(T) = \begin{cases} \lambda_\ell, & T < T_{cr} - \Delta T / 2; \\ \frac{\lambda_w - \lambda_\ell}{\Delta T} (T - T_{cr}) + \frac{\lambda_w + \lambda_\ell}{2}, & T \in \left[T_{cr} - \frac{\Delta T}{2}; T_{cr} + \frac{\Delta T}{2} \right], & (\ell w = \overline{1, m}) \\ \lambda_w, & T > T_{cr} + \Delta T / 2; \end{cases} \quad (6.83)$$

$$\Gamma_0 : \begin{cases} \Gamma_1 : & T = T(X); \\ \Gamma_2 : & \mathbf{n} \cdot [-\lambda_\ell(T)\nabla T] = q(X); \\ \Gamma_3 : & \mathbf{n} \cdot [-\lambda_\ell(T)\nabla T] = \alpha_{\text{eff}}(T|_{\Gamma_3} - T_d); \end{cases} \quad (6.84)$$

$$\Gamma_4 : \begin{cases} \Gamma_{4T} : \begin{cases} \{T\} = 0; \\ \{\mathbf{n} \cdot \mathbf{q}\} = 0; \end{cases} \\ \Gamma_{4TR} : \begin{cases} \{T\} = 0; \\ \mathbf{n} \cdot [-\lambda_\ell(T)\nabla T] = q_r. \end{cases} \end{cases} \quad (6.85)$$

де $\lambda(T)$ – теплопровідність, Вт/(м·К); T – температура, К; ∇ – оператор Гамільтона; $X_1(x, y, z) \cup X_2(x, y, z) \in X(x, y, z) \in \Omega$ – декартові координати, м; q_v – густина внутрішнього джерела теплоти, Вт/м³; σ – стала Стефана-Больцмана, Вт/(м²·К⁴); F – поверхня діатермічної області; $|X_2 - X_1| = r$ – відстань між точками X_2 і X_1 , які лежать на поверхні F , м; X_1 – точка джерела випромінювання, а X_2 – поточна точка; ε – ступінь чорноти поверхні F ; $\varphi_{X_1}, \varphi_{X_2}$ – кути між нормальними до поверхні F в точках X_1, X_2 і вектором \mathbf{r} , рад; q_r – густина результуючого радіаційного потоку, Вт/м²; T_{cr} – температура кристалізації, К; ΔT – інтервал згладжування, К; \mathbf{n} – зовнішня нормаль до границі тіла Γ ; α_{eff} – ефективний коефіцієнт тепловіддачі, Вт/(м²·К); T_d – температура довкілля, К; $\{T\} = T^+ - T^-$, T^\pm – значення функції праворуч та ліворуч від Γ_4 , К; $\{\mathbf{n} \cdot \mathbf{q}\} = \mathbf{n}^+ \cdot \mathbf{q}^+ - \mathbf{n}^- \cdot \mathbf{q}^-$; \mathbf{q} – вектор густини теплового потоку, Вт/м²; $\Omega_{\ell w}$ – об'єднана область тверде тіло-розплав; W – кількість областей (елемен-

тів конструкції); $\beta(X_1, X_2) = \begin{cases} 1 - \\ 0 - \end{cases}$

Таким чином система інтегро-диференціальних рівнянь (6.82) спільно з граничними умовами (6.83)–(6.85) є повним математичним формулюванням поставленої задачі.

6.4.2. Методика числового розв'язання

Методика числового розв'язання рівняння теплопровідності, яке входить в систему (6.82), достатньо повно викладена в працях [17–19], тому зосередимось на розгляді методики розв'язання інтегрального рівняння системи (6.82), що описує радіаційний теплообмін у діатермічній порожнині.

Спочатку виконаємо деякі перетворення. Для цього інтегральне рівняння радіаційного теплопереносу системи (6.82) запишемо в дискретній формі за умови, що на Γ_j величини T^4 , q_r беруть сталими

$$\sum_{j=1}^N H_{ij} T_i^4 = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_{rij}, i = \overline{1, N}, \quad (6.86)$$

де H і G – коефіцієнти впливу для температури та густини теплового потоку випромінюванням; N – кількість вузлів на границі поверхні Γ ; i – індекс джерела випромінювання; j – індекс поточного вузла; Γ_j – елемент розбиття поверхні Γ ;

$$H_{ij} = \delta_{ij} \sigma - \sigma \int_{\Gamma_j} K(X_1, X_2) d\Gamma, \quad i, j = \overline{1, N}, \quad (6.87)$$

$$G_{ij} = \delta_{ij} \frac{1}{\varepsilon_i(X_1)} - \int_{\Gamma_j} \frac{1 - \varepsilon_j(X_2)}{\varepsilon_j(X_2)} K(X_1, X_2) d\Gamma, \quad i, j = \overline{1, N}, \quad (6.88)$$

δ_{ij} – символ Кронекера; $K(X_1, X_2) = \frac{\cos \varphi_{X_2} \cos \varphi_{X_1}}{\pi |X_2 - X_1|^2} \beta(X_1, X_2)$ – ядро інтегрального рівняння.

Припустимо, що ступінь чорноти не залежить від X_2 , тобто $\varepsilon_j(X_2) = \text{const}$ на Γ_j . Таке припущення дозволяє спростити та значно скоротити об'єм обчислень при визначенні H і G .

Тоді вираз (6.88) приймає вид

$$G_{ij} = \delta_{ij} \frac{1}{\varepsilon_i} - \frac{1 - \varepsilon_j}{\varepsilon_j} \int_{\Gamma_j} K(X_1, X_2) d\Gamma, \quad i, j = \overline{1, N}. \quad (6.89)$$

З врахуванням (6.89) формули для визначення коефіцієнтів впливу мож-

на представити у вигляді:

$$H_{ij} = \delta_{ij} \sigma - \sigma h_{ij}, \quad i, j = \overline{1, N}, \quad (6.90)$$

$$G_{ij} = \delta_{ij} \frac{1}{\varepsilon_i} - \frac{1 - \varepsilon_j}{\varepsilon_j} h_{ij}, \quad i, j = \overline{1, N}, \quad (6.91)$$

$$\text{де } h_{ij} = \int_{\Gamma_j} K(X_1, X_2) d\Gamma = \int_{\Gamma_j} \frac{\cos \varphi_{X_2} \cos \varphi_{X_1}}{\pi |X_2 - X_1|^2} \beta(X_1, X_2) d\Gamma. \quad (6.92)$$

Таким чином, визначення коефіцієнтів впливу зведено до обчислення тільки одного інтеграла (6.92). Формули (6.90) і (6.91) справедливі для одинарних вузлів при лінійних елементах (або для постійних елементів). При подвійних вузлах ситуація дещо інша:

$$H_{ii} = - \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^M H_{ij}, \quad i = \overline{1, N} \Rightarrow H_{ii} \leq \sigma, \quad (6.93)$$

$$G_{ii} = \frac{1}{\varepsilon_i} \frac{H_{ii}}{\sigma}, \quad i = \overline{1, N}. \quad (6.94)$$

Формули (6.93) і (6.94) справедливі як для подвійних, так і для одинарних вузлів. Проте, при одинарних або центральних вузлах маємо, що

$$\frac{H_{ii}}{\sigma} = 1, \quad \text{тому справедливо } H_{ii} = \sigma, \quad G_{ii} = \frac{1}{\varepsilon_i}.$$

Порядок визначення h_{ij} залежить від виду вибраних граничних елементів, які отримують у результаті дискретизації граничної поверхні оболонки. За граничні елементи оберемо трикутні лінійні елементи. При цьому нумерація вершин трикутників, які обмежують вузол j , виконується таким чином, щоб вершина, яка співпадає з вузлом j , мала номер 3, у кожному із вказаних трикутників.

Введемо функцію

$$P = T^4.$$

У кожному трикутнику шукані функції змінюється за лінійним законом, наприклад, P і q_r :

$$\begin{cases} P(\eta_1, \eta_2) = P_1 \eta_1 + P_2 \eta_2 + P_3 (1 - \eta_1 - \eta_2), \\ q_r(\eta_1, \eta_2) = q_{r1} \eta_1 + q_{r2} \eta_2 + q_{r3} (1 - \eta_1 - \eta_2), \end{cases} \quad (6.95)$$

координати

$$\begin{cases} x(\eta_1, \eta_2) = x_1\eta_1 + x_2\eta_2 + x_3(1 - \eta_1 - \eta_2), \\ y(\eta_1, \eta_2) = y_1\eta_1 + y_2\eta_2 + y_3(1 - \eta_1 - \eta_2), \\ z(\eta_1, \eta_2) = z_1\eta_1 + z_2\eta_2 + z_3(1 - \eta_1 - \eta_2), \end{cases}$$

де індекси 1,2,3 – відносяться до номерів вершин трикутників; (η_1, η_2) – косокутна система координат, $\eta_i \in [0;1]$, $i = \overline{1,2}$, $\eta_1 + \eta_2 \leq 1$.

Щоб зберегти форму граничних рівнянь МГЕ (6.86) разом з використанням (6.90), (6.91), запишемо h_{ij} (6.92) відносно вузлових поверхневих точок j . У цьому випадку коефіцієнт h_{ij} навіть при використанні лінійних елементів стає незалежним від функції або потоку й може бути обчислений наперед

$$h_{ij} = \sum_{k=1}^L \left\{ \left| J_k \right| \int_0^1 \int_0^{1-\eta_1} (1 - \eta_1 - \eta_2) K(\eta_1, \eta_2) d\eta_2 \right] d\eta_1 \Bigg\}_k, \quad (6.96)$$

де L – кількість трикутників, які обмежують вузол j ; k – індекс трикутника.

Підставимо K із (6.92) у (6.96), отримаємо

$$h_{ij} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^L \left\{ \left| J_k \right| \int_0^1 \int_0^{1-\eta_1} (1 - \eta_1 - \eta_2) \frac{\cos[\varphi_i(\eta_1, \eta_2)] \cos[\varphi_j(\eta_1, \eta_2)]}{r^2(i, \eta_1, \eta_2)} \beta(i, \eta_1, \eta_2) d\eta_2 \right] d\eta_1 \Bigg\}_k, \quad (6.97)$$

де

$$r^2(i, \eta_1, \eta_2) = [x_i - x(\eta_1, \eta_2)]^2 + [y_i - y(\eta_1, \eta_2)]^2 + [z_i - z(\eta_1, \eta_2)]^2, i = \overline{1, N};$$

$|J_k|$ – якобіан;

$$\cos[\varphi_i(\eta_1, \eta_2)] = \frac{[x_i - x(\eta_1, \eta_2)]n_{xi} + [y_i - y(\eta_1, \eta_2)]n_{yi} + [z_i - z(\eta_1, \eta_2)]n_{zi}}{\sqrt{[x_i - x(\eta_1, \eta_2)]^2 + [y_i - y(\eta_1, \eta_2)]^2 + [z_i - z(\eta_1, \eta_2)]^2}}, \quad (6.98)$$

$$\cos[\varphi_j(\eta_1, \eta_2)] = \frac{[x(\eta_1, \eta_2) - x_i]n_{xj} + [y(\eta_1, \eta_2) - y_i]n_{yj} + [z(\eta_1, \eta_2) - z_i]n_{zj}}{\sqrt{[x_i - x(\eta_1, \eta_2)]^2 + [y_i - y(\eta_1, \eta_2)]^2 + [z_i - z(\eta_1, \eta_2)]^2}}, \quad (6.99)$$

З врахуванням (6.98) і (6.99) для (6.97) отримаємо

$$\begin{aligned} h_{ij} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^L \left\{ \left| J_k \right| \int_0^1 \int_0^{1-\eta_1} (1 - \eta_1 - \eta_2) \frac{[x_i - x(\eta_1, \eta_2)]n_{xi} + [y_i - y(\eta_1, \eta_2)]n_{yi} + [z_i - z(\eta_1, \eta_2)]n_{zi}}{\{[x_i - x(\eta_1, \eta_2)]^2 + [y_i - y(\eta_1, \eta_2)]^2 + [z_i - z(\eta_1, \eta_2)]^2\}^2} \times \right. \\ \left. \times \frac{[x(\eta_1, \eta_2) - x_i]n_{xj} + [y(\eta_1, \eta_2) - y_i]n_{yj} + [z(\eta_1, \eta_2) - z_i]n_{zj}}{\{[x_i - x(\eta_1, \eta_2)]^2 + [y_i - y(\eta_1, \eta_2)]^2 + [z_i - z(\eta_1, \eta_2)]^2\}^2} \beta(i, \eta_1, \eta_2) d\eta_2 \right] d\eta_1 \Bigg\}_k \end{aligned} \quad (6.100)$$

Інтеграл (6.100) можна визначити чисельно з використанням квадратурної формули Хамера

$$h_{ij} \approx \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^L \left\{ |J_k| \sum_{\mu=1}^n \left[(1 - \eta_{1\mu} - \eta_{2\mu}) \frac{[x_i - x_{jk\mu}]n_{xi} + [y_i - y_{jk\mu}]n_{yi} + [z_i - z_{jk\mu}]n_{zi}}{\{[x_i - x_{jk\mu}]^2 + [y_i - y_{jk\mu}]^2 + [z_i - z_{jk\mu}]^2\}^2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{[x_{jk\mu} - x_i]n_{xj} + [y_{jk\mu} - y_i]n_{yj} + [z_{jk\mu} - z_i]n_{zj}}{\{[x_i - x_{jk\mu}]^2 + [y_i - y_{jk\mu}]^2 + [z_i - z_{jk\mu}]^2\}^2} \beta(i, \eta_{1\mu}, \eta_{2\mu}) \right] \omega_{\mu} \right\}, \quad (6.101)$$

де $\eta_{1\mu}, \eta_{2\mu}, \omega_{\mu}$ – вузли та вага квадратурної формули по симплексу; n – кількість вузлів квадратурної формули Хамера; n_x, n_y, n_z – направляючі косинуси зовнішньої нормалі до площини; $x_{jk\mu}, y_{jk\mu}, z_{jk\mu}$ – координати вузлів.

Визначення $\beta(X_1, X_2)$. Нехай у просторі маємо трикутник з вершинами $1(x_1, y_1, z_1), 2(x_2, y_2, z_2), 3(x_3, y_3, z_3)$ і вектор \mathbf{AB} з вершинами $A(x_A, y_A, z_A)$ і $B(x_B, y_B, z_B)$ (рис. 6.7). Необхідно визначити умови, при яких вектор \mathbf{AB} перетинає внутрішність трикутника $\Delta 123$.

Припущення 1. Точки 1, 2 і 3 не лежать на одній прямій.

Умова перевірки:

$$\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} \neq \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} \text{ або } \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} \neq \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Припущення 2. Точки A і B лежать по різні боки від площини, у якій лежить $\Delta 123$.

Умова перевірки

$$\begin{vmatrix} x_A - x_1 & y_A - y_1 & z_A - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x_B - x_1 & y_B - y_1 & z_B - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} < 0.$$

При даних припущеннях вектори $\mathbf{r}_1 = \mathbf{A1}$, $\mathbf{r}_2 = \mathbf{A2}$ і $\mathbf{r}_3 = \mathbf{A3}$ утворюють базис простору R^3 . Представимо вектор \mathbf{AB} у вигляді лінійної комбінації векторів $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ і \mathbf{r}_3

$$\mathbf{AB} = \alpha \mathbf{r}_1 + \beta \mathbf{r}_2 + \gamma \mathbf{r}_3. \quad (6.102)$$

Вектор \mathbf{AB} перетинає внутрішність $\Delta 123$ тоді й тільки тоді, коли

$$\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0. \quad (6.103)$$

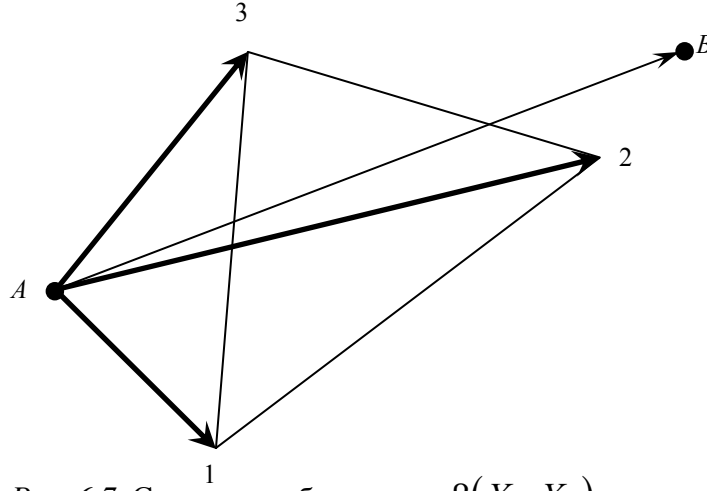


Рис. 6.7. Схема для обчислення $\beta(X_1, X_2)$

Позначимо $\mathbf{a} = \mathbf{AB}$. Для визначення α, β, γ помножимо рівність (6.101) скалярно на $\mathbf{r}_i, i = \overline{1,3}$. Отримаємо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} (\mathbf{a}, \mathbf{r}_1) = \alpha \mathbf{r}_1^2 + \beta(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + \gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3); \\ (\mathbf{a}, \mathbf{r}_2) = \alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + \beta \mathbf{r}_2^2 + \gamma(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3); \\ (\mathbf{a}, \mathbf{r}_3) = \alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) + \beta(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) + \gamma \mathbf{r}_3^2. \end{cases} \quad (6.104)$$

Для зменшення кількості арифметичних операцій при обчисленні $\beta(X_1, X_2)$ розв'язання системи (6.104) проводиться таким чином. Визначник матриці системи (6.104) можна обчислювати за допомогою алгебричних доповнень $A_{ij}, i, j = \overline{1,3}$

$$\Delta = \mathbf{r}_1^2 A_{11} + (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) A_{12} + (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) A_{13}.$$

Складемо матрицю алгебричних доповнень з врахуванням симетрії (6.104)

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Умова (6.103) виконується, якщо всі компоненти вектора

$$\Delta \cdot A \begin{pmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{r}_1) \\ (\mathbf{a}, \mathbf{r}_2) \\ (\mathbf{a}, \mathbf{r}_3) \end{pmatrix}$$

невід'ємні, тобто

$$\begin{cases} \Delta(A_{11}(\mathbf{a}, \mathbf{r}_1) + A_{12}(\mathbf{a}, \mathbf{r}_2) + A_{13}(\mathbf{a}, \mathbf{r}_3)) > 0; \\ \Delta(A_{12}(\mathbf{a}, \mathbf{r}_1) + A_{22}(\mathbf{a}, \mathbf{r}_2) + A_{23}(\mathbf{a}, \mathbf{r}_3)) > 0; \\ \Delta(A_{13}(\mathbf{a}, \mathbf{r}_1) + A_{23}(\mathbf{a}, \mathbf{r}_2) + A_{33}(\mathbf{a}, \mathbf{r}_3)) > 0. \end{cases} \quad (6.105)$$

Після виконання розрахунків всіх коефіцієнтів для кожного із елементів множини Ω можна записати систему нелінійних алгебричних рівнянь відповідно до граничних умов (6.84), (6.85). У векторній формі запису, після виконання часткової лінеаризації за методом Ньютона, система рівнянь стає лінійною відносно $\delta \mathbf{T}^{k+1}$ й має вигляд

$$\begin{cases} \mathbf{H}_\lambda \Phi^k = \mathbf{G}_\lambda \mathbf{q}^k + \mathbf{B}; \\ \left\{ \mathbf{H}_\lambda \left[\bar{\lambda}(T^k) + \frac{\partial \bar{\lambda}(T^k)}{\partial T} \mathbf{T}^k \right] + \mathbf{G}_\lambda \alpha \right\} \cdot \delta \mathbf{T}^{k+1} = -\mathbf{H}_\lambda \Phi^k + \mathbf{G}_\lambda \alpha (T_\partial - T^k) + \mathbf{B}; \\ \mathbf{H}_\lambda \left[\bar{\lambda}(T^k) + \frac{\partial \bar{\lambda}(T^k)}{\partial T} \mathbf{T}^k \right] \cdot \delta \mathbf{T}^{k+1} = -\mathbf{H}_\lambda \Phi^k + \mathbf{G}_\lambda \mathbf{q}^k + \mathbf{B}; \\ \mathbf{H}_r \mathbf{P}^k = \mathbf{G}_r \mathbf{q}^k; \\ 4\mathbf{H}_r (T^k)^3 \delta \mathbf{T}^{k+1} = -\mathbf{H}_r \mathbf{P}^k + \mathbf{G}_r \mathbf{q}^k, \end{cases} \quad (6.106)$$

де $\mathbf{H}_\lambda, \mathbf{G}_\lambda$ – відносяться до теплопровідності; $\mathbf{H}_r, \mathbf{G}_r$ – відносяться до радіаційного теплообміну; $\Phi^k = \int_0^{T^k} \lambda(T) dT$ – пряме перетворення Кірхгофа; \mathbf{B} – вектор, пов'язаний із внутрішнім джерелом теплоти.

Температура визначається в ітераційному циклі із розв'язку (6.106) за формулою $\mathbf{T}^{k+1} = \mathbf{T}^k + \delta \mathbf{T}^{k+1}$. Перші три рівняння відносяться до кондуктивного теплообміну при граничних умовах (6.84), (6.85), а два останніх – до радіаційного теплообміну при ГУ Дирихле, Неймана й контакту. Тобто при радіаційному теплообміні ГУ конвективного типу не розглядаються.

Розв'язання системи (6.106) здійснюється за допомогою методу Гауса з врахуванням стрічкової структури матриці. Після розв'язання системи (6.106) визначаються невідомі температура й густина нормальних потоків на границях.

6.4.3. Тестування методики

Тестування методики на базі МГЕ проводилося на декількох простих прикладах, для яких відомі дані точних (аналітичних) розв'язків.

Приклад 6.1. Радіаційний теплообмін між плоскими поверхнями. Необмежені пластини розділені між собою діатермічним середовищем: температури (t) і ступінь чорноти (ϵ) поверхонь пластин $t_1 = 127; 500; 1200$ °C і $t_2 = 50; 250; 500$ °C, $\epsilon_1 = 0,5; 0,8$ і $\epsilon_2 = 0,5; 0,6$. Необхідно знайти густину теплового потоку між плоскими поверхнями. При числовому розв'язанні задачі розглядався куб, на бічних поверхнях якого задавалися адіабатні умови теплообміну при $\epsilon = 0$ (табл. 6.1).

Таблиця 6.1. Співставлення даних аналітичного й числового розв'язків задачі радіаційного теплообміну між необмеженими пластинами розділеними діатермічним середовищем

Температура поверхонь, t_1/ t_2 , °C	Ступінь чорноти поверхонь, ϵ_1/ϵ_2	Густина теплового потоку, q_{12} , Вт/м ²	
		Точний розв'язок	МГЕ (150 вузлів)
127/50	0,5/0,5	278,142	278,142
	0,8/0,6	435,352	435,352
500/250	0,5/0,5	5334,39	5334,39
	0,8/0,6	8349,47	8349,47
1200/500	0,5/0,5	82233,7	82233,7
	0,8/0,6	128713,6	128713,6

Приклад 6.2. Радіаційний теплообмін між плоскими поверхнями при наявності екранів. Ступінь чорноти екранів $\epsilon_{\text{екр}} = 0,2$. Решта вихідних даних задачі така ж сама, як і в прикладі 6.1 (табл. 6.2).

Приклад 6.3. Радіаційний теплообмін між циліндричними поверхнями. Діаметри циліндрів: $d_1 = 0,1$ м, $d_2 = 0,2$ м. Решта вихідних даних задачі така ж сама, як і в прикладі 6.1. Необхідно визначити густину теплового потоку (q_1) на поверхні з діаметром d_1 . При числовому розв'язанні задачі замість циліндричних поверхонь розглядалися 24-гранні призми й використовувався метод з екрануванням при розрахунках коефіцієнтів впливу (табл. 6.3).

Приклад 6.4. Радіаційний теплообмін між циліндричними поверхнями при наявності екрану. Діаметр і ступінь чорноти екрана: $d_{\text{екр}} = 0,15$ м, $\epsilon_{\text{екр}} = 0,2$. Решта вихідних даних задачі така ж сама, як і в прикладі 6.1 (табл. 6.4).

Приклад 6.5. Стаціонарний теплообмін крізь багат шарову стінку при граничних умовах конвективного типу: кількість шарів – 3; 1-й і 3-й шари теплопровідні, а 2-й – діатермічне середовище, товщина шарів $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0,12$ м; теплопровідність шарів λ_1, λ_3 ; ступінь чорноти поверхонь, які обмежують 2-й шар $\epsilon = 0,8$; умови конвективного типу $\alpha_1 = 20$ Вт/(м²·К),

$t_1 = 1200\text{ }^{\circ}\text{C}$; $\alpha_2 = 10\text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot\text{К})$, $t_2 = 27\text{ }^{\circ}\text{C}$ (табл. 6.5).

Таблиця 6.2. Співставлення даних аналітичного й числового розв'язків задачі радіаційного теплообміну між необмеженими пластинами розділеними діатермічним середовищем без і при наявності екранів

Кількість екранів	Температура поверхонь, t_1/t_2 , $^{\circ}\text{C}$	Ступінь чорноти поверхонь, $\varepsilon_1/\varepsilon_2$	Густина теплового потоку, q_{12} , $\text{Вт}/\text{м}^2$	
			Точний розв'язок	МГЕ (150–450 вузлів)
0 1 2	127/50	0,8/0,6	435,352 76,436 41,896	435,352 76,435 41,895
0 1 2	500/250	0,5/0,5	5334,39 1333,60 762,055	5334,39 1333,59 762,055
0 1 2	1200/500	0,8/0,6	128713,6 22598,58 12386,67	128713,6 22598,56 12386,66

Таблиця 6.3. Співставлення даних аналітичного й числового розв'язків задачі радіаційного теплообміну між циліндричними поверхнями розділеними діатермічним середовищем

Температура поверхонь, t_1/t_2 , $^{\circ}\text{C}$	Ступінь чорноти поверхонь, $\varepsilon_1/\varepsilon_2$	Густина теплового потоку, q_1 , $\text{Вт}/\text{м}^2$	
		Точний розв'язок	МГЕ (576 вузлів)
127/50	0,5/0,5	333,770	335,151
	0,8/0,6	527,005	513,848
500/250	0,5/0,5	6401,26	6427,75
	0,8/0,6	10107,26	9854,92
1200/500	0,5/0,5	98680,45	99088,79
	0,8/0,6	155811,24	151921,21

Таблиця 6.4. Співставлення даних аналітичного й числового розв'язків задачі радіаційного теплообміну між циліндричними поверхнями розділеними діатермічним середовищем без і при наявності екрана

Кількість екранів	Температура поверхонь, t_1/t_2 , $^{\circ}\text{C}$	Ступінь чорноти поверхонь, $\varepsilon_1/\varepsilon_2$	Густина теплового потоку, q_{12} , $\text{Вт}/\text{м}^2$	
			Точний розв'язок	МГЕ (576–1152 вузли)
0 1	127/50	0,8/0,6	527,005 110,034	513,848 107,480
0 1	500/250	0,5/0,5	6401,26 1882,73	6427,75 1875,30
0 1	1200/500	0,8/0,6	155811,24 32532,02	151921,21 31776,99

Таблиця 6.5. Співставлення даних аналітичного й числового розв'язків стаціонарної задачі складного теплообміну в багатшаровій необмеженій плоскій стінці при граничних умовах конвективного типу

Теплопровідність λ_1/λ_3 , Вт/(м·К)	Температури, багатшарової стінки, $t_1/t_2/t_3/t_4$, °С		Густина теплового потоку, q , Вт/м ²	
	Точний розв'язок	МГЕ (1944 вузли)	Точний	МГЕ
1,5/0,2	1129,60/1016,96/ 1012,60/167,8	1129,54/1017,36/ 1013,00/167,92	1408,005	1409,246

Приклади розрахунків температурних полів в умовах дії складного теплообміну в тунельній печі та ростовому вузлі кристалізатора представлені на рис. 6.8. Для досягнення точності 0,001 °С необхідно виконати 5–8 ітерацій.

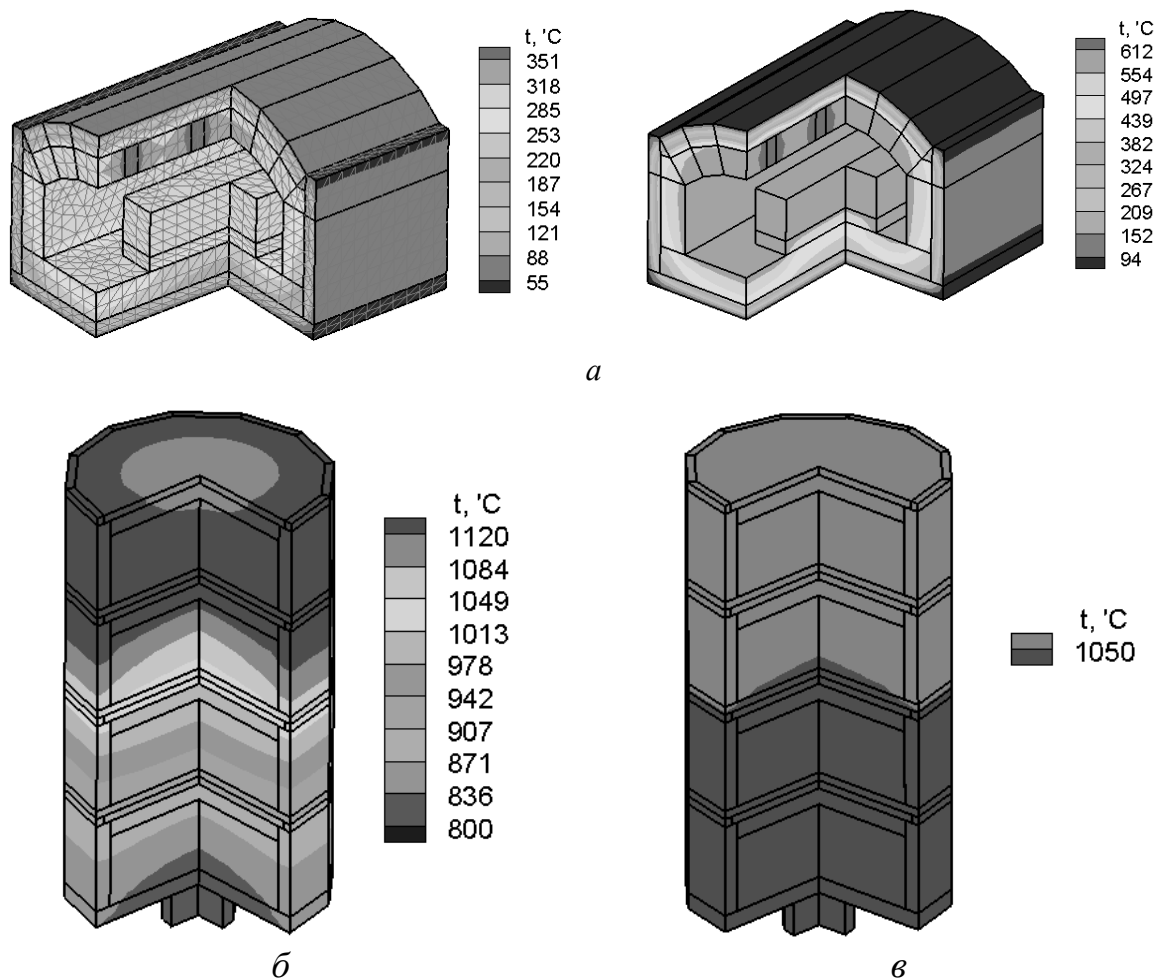


Рис. 6.8. Результати розрахунків температурних полів в умовах складного теплообміну:
 а – температурні поля тунельної печі при різних режимах нагріву заготовок;
 б – температурні поля ростового вузла кристалізатора;
 в – місце розташування та форма фронту кристалізації

6.5. Метод дискретних ординат

Найбільш близьким до МСО методом визначення радіаційного теплообміну у випромінювальному та поглинальному середовищі є МДО, який представлений у працях J. C. Chai, H. S. Lee, S. V. Patankar, J. Y. Murthy, M. Y. Kim, E. H. Chui, G. D. Raithby [21–22] та інших авторів. МДО пристосований для визначення радіаційного теплообміну в середовищах з будь-якою оптичною товщиною, від теплообміну в діатермічному середовищі до сильно поглинальних середовищ. МДО також дозволяє виконувати розрахунки радіаційного теплообміну в системах з напівпрозорими стінками і враховувати: розсіювання, селективність та анізотропію оптичних властивостей системи.

Розглянемо рівняння переносу енергії для випромінювального та поглинального середовища в «сірому» наближенні

$$\frac{dI(\mathbf{r}, \mathbf{s})}{ds} = KI_b(\mathbf{r}) - KI(\mathbf{r}, \mathbf{s}), \quad (6.107)$$

де I – інтенсивність випромінювання, Вт/(м²·ср); \mathbf{s} – вектор напрямку променя; \mathbf{r} – вектор відстані між точками, м; K – коефіцієнт поглинання середовища, м⁻¹; $I_b = \frac{n^2 \sigma T^4}{\pi}$ – інтенсивність випромінювання абсолютно чорного тіла, Вт/(м²·ср); σ – стала Стефана-Больцмана, Вт/(м²·К⁴); n – показник заломлення середовища.

Для виконання дискретизації розрахункової області використовуються опуклі багатогранники (див. розділ МСО). Рівняння (6.107) інтегрується по контрольному об'єму й по контрольному куту ($\Delta\Omega^{nm}$), як показано на рис. 6.9.

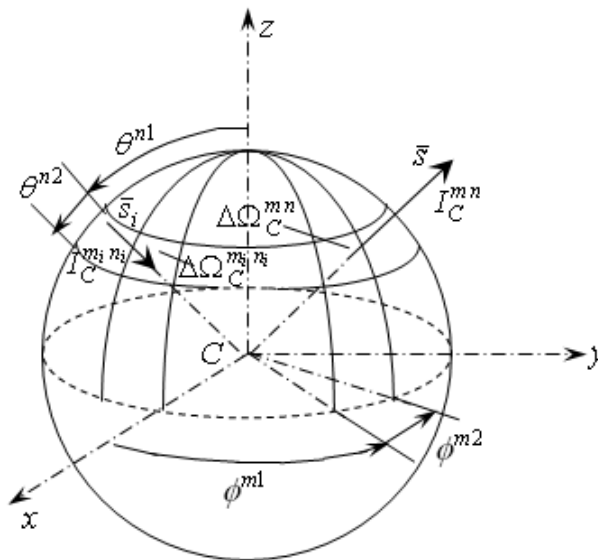


Рис. 6.9. Схема контрольного тілесного кута

Якщо припустити, що інтенсивність випромінювання в контрольному об'ємі (комірці) залежить тільки від напрямку, то формулювання МДО може бути таким

$$\sum_{i=1}^L I_i^{mn} A_{fi} D_{ci}^{mn} = K(-I^{mn} + I_b)_j V_j \Delta\Omega^{mn}, \quad j = \overline{1, M}, \quad (6.108)$$

де L – кількість граней комірки; A_{fi} – площа грані комірки;

$$D_{ci}^{mn} = \int_{\phi^{n1}}^{\phi^{n2}} \int_{\theta^{m1}}^{\theta^{m2}} (\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}_i) \sin \theta d\theta d\phi; \quad \mathbf{s} \cdot \mathbf{n} = \sin \theta \cos \phi n_x + \sin \theta \sin \phi n_y + \cos \theta n_z;$$

$$\Delta\Omega^{nm} = \int_{\phi^{n1}}^{\phi^{n2}} \int_{\theta^{m1}}^{\theta^{m2}} \sin \theta d\theta d\phi = (\phi^{n2} - \phi^{n1}) (\cos \theta^{m1} - \cos \theta^{m2}); \quad j - \text{індекс розрахункової}$$

комірки; M – кількість комірок.

Рівняння (6.108) представляє собою баланс радіаційної енергії в розрахунковій комірці: радіаційна енергія, що виходить крізь грані комірки, дорівнює генерації радіаційної енергії усередині об'єму комірки та контрольного кута.

Дискретизація тілесного кута виконується відповідно до рис. 6.9, тобто він розбивається на (N_θ, N_ϕ) напрямків, де θ – полярний кут $(0 - \pi)$, а ϕ – азимутальний кут $(0 - 2\pi)$. На практиці часто використовується рівномірний поділ кутів

$$\Delta\theta^m = \theta^{m2} - \theta^{m1} = \frac{\pi}{N_\theta}, \quad \Delta\phi^n = \phi^{n2} - \phi^{n1} = \frac{\pi}{N_\phi}.$$

У кожному контрольному куті кутові границі є фіксованими. Вага напрямку, який визначається вхідним або вихідним потоком радіаційної енергії крізь грані дискретної комірки, обчислюється за допомогою інтегрування виразу для D_{ci}^{mn} (6.108)

$$D_{ci}^{nm} = \left[\frac{\sin 2\theta^{m2} - \sin 2\theta^{m1}}{4} + \frac{\theta^{m1} - \theta^{m2}}{2} \right] \left[n_x (\sin \phi^{n1} - \sin \phi^{n2}) + \right. \\ \left. + n_y (\cos \phi^{n2} - \cos \phi^{n1}) \right] + n_z (\cos^2 \theta^{m2} - \cos^2 \theta^{m1}) \frac{\phi^{n1} - \phi^{n2}}{2}. \quad (6.109)$$

Запишемо співвідношення між інтенсивністю на грані комірки та інтенсивністю в сусідніх вузлових точках

$$I_i^{mn} D_{ci}^{nm} = I_j^{mn} D_{ci,out}^{nm} + I_{l(i)}^{mn} D_{ci,in}^{nm}, \quad (6.110)$$

де $D_{ci,out}^{nm}$ і $D_{ci,in}^{nm}$ є різними й залежать від перетину контрольного кута.

На неструктурованих сітках перетин може відбуватись як усередині, так і на границі граней. Розглянемо три випадки розв'язання проблеми перетину контрольного кута або перетину грані розрахункової комірки й тіла контрольного кута (рис. 6.10).

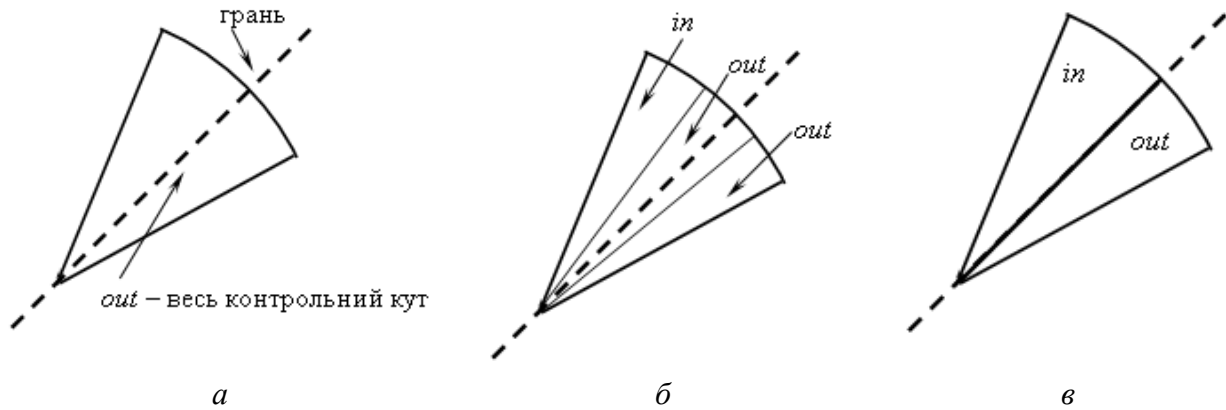


Рис. 6.10. Варіанти вирішення проблеми перетину контрольного кута:
а – груба апроксимація; б – метод подрібнення контрольного кута; в – точний метод

При грубій апроксимації (див. рис. 6.10,а) тілесний кут приймається повністю вхідним або вихідним залежно від знаку направленої ваги D_{ci}^{nm} :

$$I_i^{mn} D_{ci}^{nm} = I_j^{mn} \max(D_{ci}^{nm}, 0) - I_{l(i)}^{mn} \max(-D_{ci}^{nm}, 0), \quad (6.111)$$

або (6.110) при

$$\begin{cases} D_{ci,out}^{mn} = \max(D_{ci}^{mn}, 0) \\ D_{ci,in}^{mn} = -\max(-D_{ci}^{mn}, 0) \end{cases} \quad (6.112)$$

де $l(i)$ – номер комірки, що має спільну грань i з коміркою з індексом j .

При застосуванні методу подрібнення тільки контрольні кути з перетином підлягають подрібненню, у той час як у інших кутах застосовується звичайна груба апроксимація. При цьому всередині подрібненого кута з перетином також застосовується груба апроксимація, але вже для меншого кута, ніж у першому методі. На рис. 6.10,б показана схема методу з трикратним подрібненням азимутального контрольного кута.

Основним недоліком розглянутих методів є порушення балансу енергії між вхідною та вихідною інтенсивністю в куті з перетином. Метод подрібнення задовольняє балансу енергії тільки при великій кількості подрібнень, що веде до значного збільшення вимог до обчислювальних ресурсів. При застосуванні точного методу (див. рис. 6.10,в) проблема з небалансом енергії повніс-

тю зникає. При цьому грань комірки в куті з перетином точно ділить його на дві частини з вхідною й вихідною інтенсивністю. Інтенсивності на грані визначаються також по (6.110), але при цьому

$$\begin{cases} D_{ci,out}^{mn} = \int_{\Delta\Omega^{nm}} (\mathbf{s}' \cdot \mathbf{n}_i) d\Omega, \quad \mathbf{s}' \cdot \mathbf{n}_i > 0; \\ D_{ci,in}^{mn} = \int_{\Delta\Omega^{nm}} (\mathbf{s}' \cdot \mathbf{n}_i) d\Omega, \quad \mathbf{s}' \cdot \mathbf{n}_i < 0. \end{cases} \quad (6.113)$$

У точному методі загальна кількість контрольних кутів дорівнює $N_\theta(N_\phi + 2)$, що може бути набагато меншим ніж у методі з подрібненням.

Відповідно до вищенаведених співвідношень рівняння (6.108) може бути перетворено в лінійне рівняння відносно інтенсивності у вузлах комірок

$$aC_j^{mn} I_j^{mn} = \sum_{i=1}^L a f_i^{mn} I_{l(i)}^{mn} + b_j^{mn}, \quad (6.114)$$

де

$$aC_j^{mn} = \sum_{i=1}^L A_{fi} D_{ci,out}^{mn} + KV \Delta\Omega^{mn}; \quad (6.115)$$

$$a f_i^{mn} = -A_{fi} D_{ci,in}^{mn}; \quad (6.116)$$

$$b_j^{mn} = KI_b V \Delta\Omega^{mn}; \quad (6.117)$$

де $\Delta\Omega^{mn} = (\phi^{n2} - \phi^{n1})(\cos\theta^{m1} - \cos\theta^{m2})$; L – кількість граней комірки j .

Для дифузно-випромінювальних та поглинальних границь дискретне рівняння може бути записано в такому вигляді

$$I_w^{mn} = \varepsilon_w I_{bw} + \frac{1 - \varepsilon_w}{\pi} \sum_{\mathbf{s}_i \cdot \mathbf{n}_w < 0} I_w^{m_i n_i} |D_{cw,in}^{m_i n_i}|, \quad \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{n}_w > 0, \quad (6.118)$$

де w – індекс, який відноситься до границі; i – індекс, який відноситься до грані пристінної комірки; I_w^{mn} – інтенсивність на грані стінки, яка включає власне випромінювання стінки та відбите від стінки випромінювання, що падає; $\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}_w = \sin\theta \cos\phi_{wx} + \sin\theta \sin\phi_{wy} + \cos\theta n_{wz}$; ε_w – ступінь чорноти стінки;

$$D_{cw,in}^{mn} = \int_{\Delta\Omega^{mn}} (\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}_w) d\Omega, \quad \mathbf{s} \cdot \mathbf{n}_w < 0.$$

Для розв'язання рівняння (6.114) застосовується процедура Гауса-Зейделя аналогічна МСО

$$(I_j^{mn})^{k+1} = (I_j^{mn})^k (1 - \alpha_I) + \frac{\alpha_I \left[\sum_{i=1}^L a f_i^{mn} \cdot I_{l(i)}^{mn} + b_j \right]}{a C_j^{mn}}, \quad j = \overline{1, M}, \quad (6.119)$$

де α_I – коефіцієнт релаксації для інтенсивності випромінювання;

$$I'_{l(i)} = \begin{cases} I_l^{k+1} & \text{при } l < j \\ I_l^k & \text{при } l \geq j \end{cases}.$$

Ітераційна процедура системи рівнянь (6.119) є закінченою, коли досягається точність розрахунку ε_I

$$\max \left| (I_j^{mn})^{k+1} - (I_j^{mn})^k \right| \leq \varepsilon_I. \quad (6.120)$$

Радіаційний тепловий потік на стінці визначається із співвідношення

$$q_r = \int_{\Omega=4\pi} I(\mathbf{r}_w, \mathbf{s}) (\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}_w) d\Omega = \sum_{n=1}^{N_\phi} \sum_{m=1}^{N_\theta} I_w^{mn} (D_{cw,in}^{mn} + D_{cw,out}^{mn}). \quad (6.121)$$

Величина S_j у рівняннях енергії визначається з використанням (6.108)

$$S_j = \nabla \cdot \mathbf{q}_r = K \left[\sum_{n=1}^{N_\phi} \sum_{m=1}^{N_\theta} (I_b - I^{mn})_j \Delta \Omega^{mn} \right]_j V_j = \sum_{n=1}^{N_\phi} \sum_{m=1}^{N_\theta} \sum_{i=1}^L (I_i^{mn} A_{fi} D_{ci}^{mn})_j, \quad j = \overline{1, M}. \quad (6.122)$$

Запитання для самоконтролю

1. Визначення дифузних кутових коефіцієнтів.
2. Спрощений зональний метод для замкнених систем з дифузно-відбивальними поверхнями.
3. Наближення «сірого» тіла.
4. Замкнена система «сірих» тіл.
5. Основні положення зонального методу для напівпрозорого середовища.
6. Визначення густини випромінювання, що падає на поверхню.
7. Взаємна поверхня пари тіл.
8. Взаємна поверхня обміну випромінюванням між газом і твердою поверхнею.
9. Взаємна поверхня теплообміну випромінюванням між двома об'ємами напівпрозорого середовища.
10. Коефіцієнти опромінення.
11. Рівняння теплового балансу в об'ємі V_γ «сірого» середовища з постійними властивостями.

12. Осереднення коефіцієнтів поглинання середовища.
13. Наближення оптично тонкого й товстого шару.
14. Основні положення методу граничних елементів.
15. Визначення матриць коефіцієнтів впливу для потоку й температури.
16. Алгоритм визначення прямої видимості тіл або затінення об'єктів.
17. Основні положення методу дискретних ординат.
18. Варіанти вирішення проблеми перетину контрольного кута.
19. У чому полягає схожість між МДО і МСО.

7. БАГАТОДИСЦИПЛІНАРНИЙ АНАЛІЗ

7.1. Математична модель теплоелектричного стану промислового обладнання. Методика числового розв'язання теплоелектричної задачі

7.1.1. Постановка задачі

При проектуванні нового або модернізації діючого промислового обладнання велике значення мають дані з їх енергетичних балансів, які дають можливість оцінювати його енергетичну ефективність, для порівняння різних конструкцій й визначення резервів зниження питомих витрат енергії (ПВЕ). Для виконання розрахунків енергобалансів необхідно спочатку визначити теплоелектричний стан промислового агрегату, що описується системою диференціальних рівнянь у частинних похідних (7.1) з врахуванням контактної взаємодії між елементами конструкції

$$\begin{cases} \nabla \cdot [\chi_i(t) \nabla U(X)] = 0; \\ \frac{\partial h}{\partial \tau} = \nabla \cdot [\lambda_i(t) \nabla t(X)] + q_{vi}(X), \end{cases} \quad (7.1)$$

де $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ – оператор Гамільтона; χ – електропровідність, $(\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1}$; t – температура, $^{\circ}\text{C}$; U – електричний потенціал, В; $X(x, y, z) \in R^3$ – декартові координати, м; $h = \int_{T_0}^T \rho(T) c_p(T) dT$ – об'ємна ентальпія, $\text{Дж}/\text{м}^3$; c_p – масова ізобарна теплоємність, $\text{Дж}/(\text{кг} \cdot \text{K})$; ρ – густина, $\text{кг}/\text{м}^3$; T_0 – температура відліку; К; τ – час, с; λ – теплопровідність, $\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{K})$; $i = \overline{1, M}$ – індекс елемента конструкції; M – кількість елементів конструкції; $q_{vi}(X) = \chi_i(t) |\nabla U|^2$ – густина внутрішнього джерела теплоти, $\text{Вт}/\text{м}^3$.

Початкові умови

$$t|_{\tau=0} = t(X). \quad (7.2)$$

ГУ для квазістаціонарного рівняння електропровідності
– на струмовідводах

$$\begin{cases} U = 0; \\ \mathbf{n} \cdot (-\chi(t) \nabla U) = j_n, \end{cases} \quad (7.3)$$

де \mathbf{n} – зовнішня нормаль до граничної поверхні;

j_n – нормальна густина струму, А/м²;

– на границях контакту між елементами конструкції

$$\begin{cases} \{U\} = \mathbf{n} \cdot (r_e \mathbf{j}); \\ \{\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}\} = 0, \end{cases} \quad (7.4)$$

де $\{U\} = U^+ - U^-$; $\{\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}\} = \mathbf{n}^+ \cdot \mathbf{j}^+ - \mathbf{n}^- \cdot \mathbf{j}^-$; r_e – контактний електричний опір, Ом·м²;

– на інших поверхнях

$$\mathbf{n} \cdot \nabla U = 0. \quad (7.5)$$

ГУ для нестационарного рівняння теплопровідності:

– на зовнішніх границях контакту з довкіллям

$$\mathbf{n} \cdot (-\lambda(t) \nabla t) = \alpha_{ef}(t)(t - t_d), \quad (7.6)$$

де α_{ef} – ефективний коефіцієнт тепловіддачі, Вт/(м²·К); t_d – температура довкілля, °С;

– на осях симетрії

$$\mathbf{n} \cdot \nabla t = 0; \quad (7.7)$$

– на границях контакту між елементами конструкції

$$\begin{cases} \{t\} = \mathbf{n} \cdot (r_\lambda \mathbf{q}); \\ \{\mathbf{n} \cdot \mathbf{q}\} = 0, \end{cases} \quad (7.8)$$

де $\mathbf{q} = -\lambda(t) \nabla t$ – вектор густини теплового потоку, Вт/м²;

r_λ – контактний термічний опір, (м²·К)/Вт.

7.1.2. Методика числового розв'язання

При розв'язанні зв'язаної нелінійної теплоелектричної задачі з врахуванням термоелектричних ефектів [27] та анізотропії властивостей матеріалу система дискретних рівнянь методу скінченних елементів приймає вигляд

$$\begin{bmatrix} [c^{(e)}] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{H}(\hat{T})\} \\ \{\dot{U}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [k_\lambda^{(e)}] + [k_\alpha^{(e)}] \alpha(\hat{T}) & [0] \\ [k_{UP}^{(e)}(\hat{T})] & [k_U^{(e)}(\hat{T})] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\hat{T}\} \\ \{U\} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \{f\} + \{f^P\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}, \quad (7.9)$$

де $\dot{H}(\hat{T})$ – похідна за часом від ентальпії, Дж/(м³·с); \dot{U} – похідна за часом від електричного потенціалу, В/с; $[k_\lambda^{(e)}] = \int_V [B]^T [\lambda(\hat{T})] [B] dV$ – матриця теплопровід-

ності елемента; $[\lambda(\hat{T})] = \begin{bmatrix} \lambda_{xx}(\hat{T}) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{yy}(\hat{T}) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{zz}(\hat{T}) \end{bmatrix}$ – матриця теплопровідності

ізотропного матеріалу, Вт/(м·К); $[k_{UP}^{(e)}(\hat{T})] = \int_V [B]^T [\chi(\hat{T})] [\zeta(\hat{T})] [B] dV$ – матриця

коефіцієнтів Зеебека елемента; $[k_U^{(e)}(\hat{T})] = \int_V [B]^T [\chi(\hat{T})] [B] dV$ – матриця електро-

провідності елемента; $[\chi(\hat{T})] = \begin{bmatrix} \chi_{xx}(\hat{T}) & 0 & 0 \\ 0 & \chi_{yy}(\hat{T}) & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{zz}(\hat{T}) \end{bmatrix}$ – матриця електропро-

відності для анізотропного матеріалу, (Ом·м)⁻¹; $[\zeta(\hat{T})] = \begin{bmatrix} \zeta_{xx}(\hat{T}) & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_{yy}(\hat{T}) & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_{zz}(\hat{T}) \end{bmatrix}$

– матриця коефіцієнтів Зеебека [27] матеріалу, В/К; $\{f^P\} = \int_V [B]^T [\hat{T} \cdot \zeta(\hat{T})] \{j\} dV$

– вектор теплового навантаження елемента, пов'язаний із ефектом Пельтьє [27]; $\{j\}$ – вектор густини електричного струму, А/м².

$\{f\} = - \int_V [\chi(\hat{T})] \{\nabla U\} \{\nabla U\} [N]^T dV - T_d \int_{S1} \alpha(\hat{T}) [N^{(e)}]^T dS + \int_{S2} q^{(e)} [N]^T dS$ – вектор ві-

льних членів рівняння теплопровідності, пов'язаний з джерелом теплоти та ГУ II, III родів, у якому $[\chi(\hat{T})] \{\nabla U\} \{\nabla U\} = q_V^{(e)}$ – густина внутрішнього джерела теплоти в елементі, що спричинена протіканням електричного струму (закон Джоуля–Ленца [27]), Вт/м³; $\{\nabla U\} = [B] \{U\}$ – градієнт або напруженість електричного поля, В/м.

Для розв'язання нелінійної системи дискретних рівнянь (7.9) застосовується метод Ньютона [26]. При відсутності термоелектричних ефектів $[k_{UP}^{(e)}(\hat{T})] = [0]$, $\{f^P\} = \{0\}$ система (7.9) спрощується до виду

$$\begin{bmatrix} [c^{(e)}] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{H}(\hat{T})\} \\ \{\dot{U}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [k_\lambda^{(e)}] + [k_\alpha^{(e)}] \alpha(\hat{T}) & [0] \\ [0] & [k_U^{(e)}(\hat{T})] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\hat{T}\} \\ \{U\} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \{f\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}, \quad (7.10)$$

При розв'язанні задач теорії потенціалу й теплопровідності з контактною взаємодією між сполученими тілами методами МСЕ для спрощення побудови складних числових моделей можливе застосування наближеної методики, яка полягає в заміні контактних поверхонь на тонкі шари з ефективними коефіцієнтами, що є цілком доцільним при виконанні багатьох інженерних ро-

зрахунків. Наприклад, ефективна теплопровідність тонкого шару товщиною δ визначається як $\lambda_{\text{ef}} = \delta / r_\lambda$, а ефективна електропровідність – $\chi_{\text{ef}} = \delta / r_e$. При цьому зберігається схема наскрізного розрахунку полів потенціалів, яка є властивою для МСЕ.

7.2. Математична модель термопружного стану промислового обладнання. Методика числового розв'язання задачі статичної термопружності

7.2.1. Постановка задачі

Оскільки зміна термічних станів конструкцій багатьох промислових агрегатів при їх експлуатації проходить досить повільно, то для математичного описання напружено-деформованого стану (НДС) їх елементів можна скористатися незв'язаною постановкою статичної або квазістатичної задачі термопружності, у якій не враховується ефект зв'язаності температурного поля й поля деформацій, а також сили інерції, що обумовлені нестационарним температурним полем.

Для пружних тіл диференціальні рівняння механічного руху та рівноваги в тензорній формі приймають вигляд [17]

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0, \quad i = \overline{1,3}, \quad (7.11)$$

де σ_{ij} – компоненти тензора напружень, Па; $f_i = \rho g_i$ – компоненти об'ємних сил, що пов'язані з гравітаційним навантаженням, Па/м; g_i – компоненти вектора прискорення вільного падіння, м/с².

При температурному навантаженні тензор напружень для ізотропних матеріалів визначається узагальненим законом Гука

$$\sigma_{ij} = 2G \left[\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \beta \delta_{ij} t \right], \quad i, j = \overline{1,3}, \quad (7.12)$$

де $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ – пружний модуль зсуву, Па; E – модуль пружності при розтягу, Па; ν – коефіцієнт Пуассона; $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ – тензор малих деформацій Коші;

u – переміщення, м; β – коефіцієнт лінійного температурного розширення, К⁻¹; t – температурне навантаження, отримане із розв'язків теплових або теплоелектричних задач.

ГУ для задачі термопружності:

– Дирихле (нульові переміщення або защемлення)

$$u_i = 0, \quad i = 1, 2, 3; \quad (7.13)$$

– симетрії

$$n_i u_i = 0; \quad (7.14)$$

де n_i , $i = \overline{1,3}$ – компоненти нормалі до поверхні;
– типу Неймана

$$n_j \sigma_{ji} = p_i, \quad i = \overline{1,3}, \quad (7.15)$$

де p – зусилля, Па;

– на границях контакту між елементами конструкції [28]

$$\begin{cases} n_i^+ u_i^+ + n_i^+ u_i^- - \delta \leq 0, \quad i = \overline{1,3}; \\ \{n_j \sigma_{ji}\} \leq 0; \\ (n_i^+ u_i^+ + n_i^+ u_i^- - \delta) \sigma_n = 0; \\ |\sigma_\tau| \leq -f \sigma_n, \end{cases} \quad (7.16)$$

де δ – початковий зазор у напрямку нормалі до поверхонь, що контактують, м; σ_n – напруження в нормальному напрямку до поверхні контакту, Па; σ_τ – тангенціальна складова напруження, Па; f – коефіцієнт сухого тертя.

Перша нерівність (7.16) є умовою взаємного непроникнення тіл і пов'язана з силовим співвідношенням (друга нерівність (7.16)), оскільки закриття зазору спричинює виникнення контактного тиску. Третє рівняння (7.16) відповідає нульовим контактним напруженням, що спричинює роз'єднання контактних тіл. Четверта нерівність описує умови фрикційної взаємодії тіл (поверхневих напружень) у формі закону Амонтона-Кулона.

Фізичний зміст величин що входять у постановку (7.11)–(7.16).

Модуль пружності це фізична величина, яка характеризує опір матеріалу при розтягу/стисканні при пружній деформації й чисельно дорівнює напруженню, яке виникає в зразку, якщо його довжина збільшилась у два рази (тобто при деформації у 100 %).

Модуль зсуву це фізична величина, яка чисельно дорівнює дотичному напруженню, яке виникло б у зразку при відносному зсуві рівному 100 % (за умови, що закон Гука виконується).

Коефіцієнт Пуассона ізотропного матеріалу це фізична величина, яка характеризує пружні властивості матеріалу й визначається відношенням поперечного стискання до повздовжнього розтягу зразка матеріалу й лежить у межах ($0 < \nu \leq 0,5$). Для абсолютно крихкого матеріалу $\nu = 0$, а для абсолютно пружного $\nu = 0,5$.

Коефіцієнт лінійного температурного розширення речовини це фізична величина, яка чисельно дорівнює подовженню, яке отримує зразок з початковою одиничною довжиною, при його нагріванні на 1 К.

7.2.2. Методика числового розв'язання

Для розв'язання лінійних задач теорії пружності найбільше поширення отримав метод скінченних елементів [15, 16]. Система дискретних рівнянь МСЕ для задачі термопружності одержана шляхом мінімізації функціоналу повної потенціальної енергії й має вигляд [15]

$$\sum_{e=1}^M ([k^{(e)}] \{U\}) = - \sum_{e=1}^M \{f^{(e)}\}, \quad (7.17)$$

де M – кількість елементів; $[k^{(e)}] = \int_V [B^{(e)}]^T [D] [B^{(e)}] dV$ – матриця жорсткості

елемента; $[B]$ – матриця градієнтів, яка пов'язує деформації й переміщення; $[D]$ – матриця пружних характеристик матеріалу; V – об'єм елемента; $\{U\}$ – вектор вузлових переміщень елемента;

$\{f^{(e)}\} = - \int_V [N^{(e)}]^T \{G\} dV - \int_V [B^{(e)}]^T [D] \{\epsilon_0^{(e)}\} dV - \int_S [N^{(e)}]^T \{p\} dS$; $[N^{(e)}]$ – матриця функцій форми елемента; $\{G\}$ – вектор об'ємних сил, наприклад, гравітаційних; $\{\epsilon_0^{(e)}\}$ – початкова деформація елемента, наприклад, пов'язана з температурним навантаженням; $\{p\}$ – вектор поверхневого навантаження на елемент.

При застосуванні МСЕ для дискретизації $\Omega \in R^3$ так само, як і для задач теорії потенціалу, використовуються чотирих- та шестигранні елементи з 4-а та 8-а вузлами (тетраедри й гесегедрони, відповідно). Для обчислення коефіцієнтів системи рівнянь (7.17) використовується така ж сама методика, що і для задач теорії потенціалу (див. пп. 4.1–4.5). Після розв'язання системи (7.17) при заданих ГУ прямим або ітераційним методом з врахуванням стрічкової структури матриці [16] отримуємо поле вузлових переміщень. Вектори переміщень $\{u\}$, пружних деформацій $\{\epsilon\}$ та пружних напружень $\{\sigma\}$ в елементах визначаються із таких співвідношень:

$$\{u\} = [N] \{U\}, \quad (7.18)$$

$$\{\epsilon\} = [B] \{U\}, \quad (7.19)$$

$$\{\sigma\} = [D] (\{\epsilon\} - \{\epsilon_0\}). \quad (7.20)$$

При врахуванні початкових напружень вектор напружень елемента визначається як

$$\{\sigma\} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) + \{\sigma_0\}, \quad (7.21)$$

де $\{\sigma_0\}$ – вектор початкових напружень.

При розв’язанні геометрично нелінійних задач теорії пружності, які мають місце при великих переміщеннях, можна скористатись методикою описаною в праці [15].

При наявності контактної взаємодії з врахуванням коефіцієнта сухого тертя методика розрахунків подібна, запропонованій А. М. Підгорним у монографії [28].

Запитання для самоконтролю

1. Які рівняння математичної фізики включає постановка теплоелектричної задачі?
2. Які фізичні величини включає система рівнянь теплоелектричної задачі, їх фізичний зміст?
3. Сформулюйте початкові та граничні умови теплоелектричної задачі.
4. Чому не записуються початкові умови для рівняння електричного потенціалу?
5. Визначення контактного термічного та електричного опорів. Природа їх виникнення.
6. У чому полягає спрощена методика врахування контактного опору при застосуванні МСЕ?
7. Фізичні умови застосування задач статичної термopужності для аналізу напружено-деформованого стану. Які об’ємні сили враховуються в цій задачі.
8. На якому законі базується рівняння механічного руху й рівноваги? Які фізичні величини включає цей закон, їх фізичний зміст?
9. Граничні умови задачі статичної пружності (термopужності).
10. Опишіть фізичний зміст контактних граничних умов.
11. Методика числового розв’язання задачі статичної термopужності методом МСЕ.

8. МЕТОДИКИ СКЛАДАННЯ ЕНЕРГЕТИЧНИХ І ТЕПЛОВИХ БАЛАНСІВ ПРОМИСЛОВОГО ОБЛАДНАННЯ

8.1. Методика складання енергетичного балансу алюмінієвого електролізера за температури довкілля

Основними показниками, які визначають енергетичну ефективність роботи алюмінієвого електролізера (рис. 8.1), є вихід за струмом та питомі витрати електроенергії. Потужним інструментом аналізу енергетичного стану алюмінієвих електролізерів був та лишається їх енергетичний баланс. Тому на практиці проектування нових і модернізації діючих агрегатів широке застосування отримали енергетичні баланси електролізерів, які дозволяють оцінювати як енергетичну ефективність ванн у цілому, так і окремих його статей і визначати резерви та шляхи зниження ПВЕ і підвищення виходу за струмом. Іншими словами можна сказати, що теоретичний баланс є енергетичним паспортом алюмінієвого електролізера.

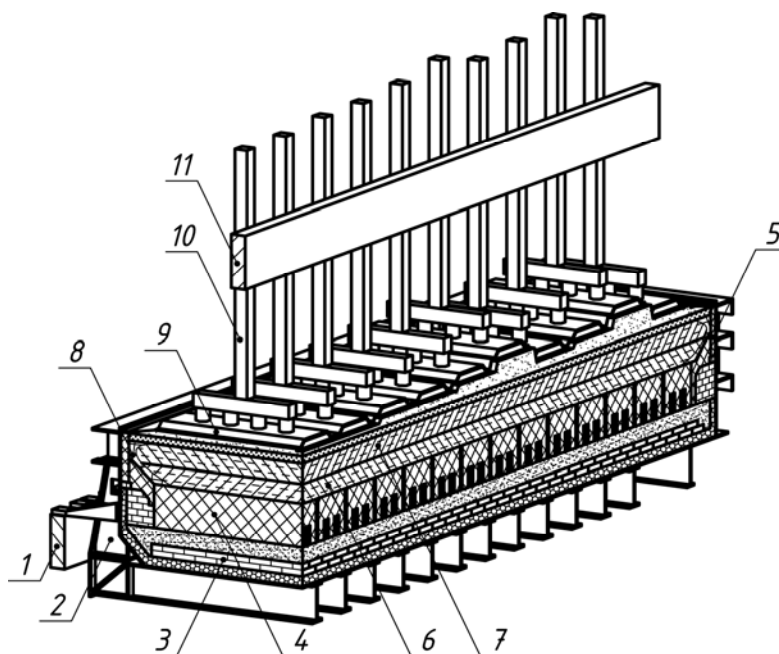


Рис. 8.1. Електролізер з обпаленими анодами (ОА) на силу струму 320 кА:
1 – катодна шина; 2 – каркасно-шпангоутний катодний кожух; 3 – цокольне футерування;
4 – подова секція; 5 – бортовий блок; 6 – метал; 7 – електроліт; 8 – гарнісаж і настіль;
9 – попередньо обпалений анод; 10 – анодна штанга; 11 – анодна шина

Класична методика складання або розрахунків енергобалансів електролізерів з самоспівливими анодами (СА) і ОА при температурі процесу і оточуючого середовища (рис. 8.2) достатньо повно представлена в працях [29, 30]. До основних недоліків класичної методики можна віднести: необхідність проведення експериментів на діючих електролізерах та неможливість її застосування до електролізерів, що проектуються. Використання числового

модельовання тривимірних фізичних полів у алюмінієвих електролізерах замість виконання натурного експерименту в сполученні з елементами класичної методики дозволяє уникнути вищезазначених недоліків та виконувати розрахунки енергобалансів електролізерів на стадії їх проектування. При цьому для визначення полів електричного потенціалу й температури можна використовувати незв'язану постановку задач типу (див. п. 7.1).

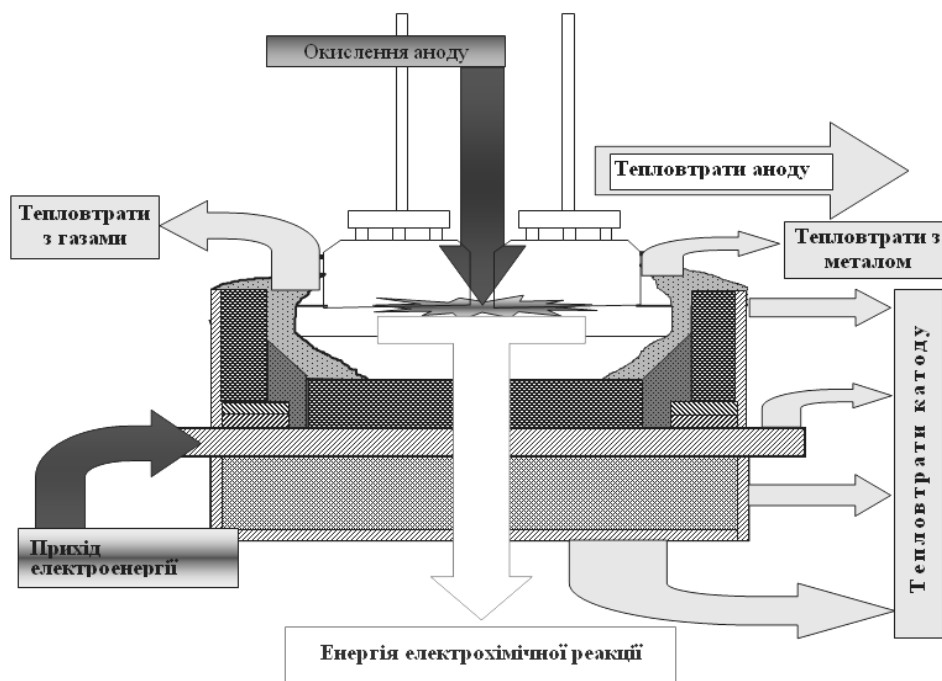


Рис. 8.2. Структурна схема енергобалансу на температуру довкілля електролізера ОА

Методика розрахунку електробалансу представлена в працях [31, 32]. При розв'язанні незв'язаної задачі з врахуванням контактної взаємодії вихідним параметром для розрахунку поля електричного потенціалу електролізера є довжина настилі, а для розрахунку поля температур – падіння електричної напруги в анодному вузлі й подині, омичне падіння напруги в електроліті. Таким чином теплоелектричні поля електролізера знаходяться методом послідовних наближень. Критерієм збіжності при цьому є або довжина настилі під проекцією анода або величина її зміни, яка визначається із розв'язання теплової задачі.

Після розрахунку поля електричного потенціалу електролізера визначається падіння електричної напруги на окремих його елементах. Спочатку знаходиться середній потенціал на відповідних поверхнях елементів електролізера як середня інтегральна величина. Далі розраховується падіння напруги в елементах конструкції електролізера як різниця між середніми значеннями потенціалів відповідних поверхонь: $\Delta u_{\text{под}}$, $\Delta u_{\text{ан}}$, $\Delta u_{\text{ом}}$ МПЗ і падіння напруги в ошиновуванні електролізера

$$\Delta u_{\text{ош}} = u_{\text{max}} - \Delta u_{\text{ан}} - \Delta u_{\text{ом МПЗ}} - \Delta u_{\text{под}}, \quad (8.1)$$

де u_{max} – максимальне значення розрахованого електричного потенціалу, В; $\Delta u_{\text{ан}}$ – падіння напруги в аноді, В; $\Delta u_{\text{ом МПЗ}}$ – омичне падіння напруги в міжполюсному зазорі (МПЗ), В; $\Delta u_{\text{под}}$ – падіння напруги в подині (катоді), В.

Розрахунок падіння електричної напруги в МПЗ від електрохімічних реакцій розкладання Al_2O_3 проходить у декілька етапів. Спочатку визначається продуктивність електролізера при виході за струмом $\eta_{\text{т}} = 100\%$

$$M_{\text{Al}} = \frac{\gamma I}{3600 \cdot 1000}, \quad (8.2)$$

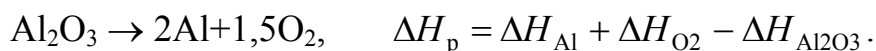
де $\gamma = 0,3354$ г/(А·год) – електрохімічний еквівалент отримання алюмінію; I – сила струму на електролізері, А.

Далі визначається теплота згорання аноду (В)

$$E_{\text{зг.ан}} = \frac{9300M_{\text{CO}_2} + 8800M_{\text{CO}}}{I}, \quad (8.3)$$

де M_{CO_2} , M_{CO} – масові витрати CO_2 і CO , відповідно, кг/с.

Потім визначається ентальпія ($\Delta H_{\text{р}}$, кДж/моль) або тепловий ефект реакції розкладання глинозему на інертному аноді [30] при температурі електролізу:



Далі ентальпія реакції перераховується в електричну напругу

$$E_{\text{Al}_2\text{O}_3} = \Delta H_{\text{р}} / (nF), \quad (8.4)$$

де n – кількість електронів, що беруть участь у реакції; $F = 96485,3$ Кл/моль – число Фарадея.

Напруга електрохімічної реакції при виході за струмом 100 % визначається як

$$\Delta u_{\text{ел.хім}} = E_{\text{Al}_2\text{O}_3} - E_{\text{зг.ан}}. \quad (8.5)$$

Величина $\Delta u_{\text{ел.хім}}$ додається до омичного падіння напруги в електроліті. У результаті отримуємо падіння напруги в електроліті

$$\Delta u_{\text{ел}} = \Delta u_{\text{ом МПЗ}} + \Delta u_{\text{ел.хім}}. \quad (8.6)$$

При виході за струмом $< 100\%$ частина $\Delta u_{\text{ел.хім}}$ переходить в омичне падіння напруги в електроліті. В останню чергу обчислюється робоча напруга ($u_{\text{р}}$, В) на електролізері

$$u_p = \Delta u_{\text{ан}} + \Delta u_{\text{ел}} + \Delta u_{\text{под}} + \Delta u_{\text{ош}}. \quad (8.7)$$

З використанням числового розв'язку по скінченних елементах розраховуються такі параметри струму в електролізері: на торцях блюмсів і анодних штангах обчислюються розподіли результуючих значень $j_{\text{sum}}, I_{\text{sum}}$; на підшві аноду обчислюються розподіли складових векторів густини й сили струму $j_x, I_x; j_y, I_y; j_z, I_z; j_{\text{sum}}, I_{\text{sum}}$. Також визначається сумарний струм через електролізер у різних перетинах (наприклад, підшви аноду, блюмсів, анодних штанг).

Вищеописана методика розрахована для виконання розрахунків полів електричного потенціалу електролізерів різних типів при зміні довжини подової настилі, МПЗ, розмірів катодних секцій та їх матеріалів, розмірів бортових блоків, технологічних параметрів експлуатації та ін. При цьому виконуються розрахунки електробалансу електролізера, розподілу електричного струму та його густини на анодних штангах, на підшві аноду й на торцях блюмсів. Також обчислюються значення горизонтальних складових струму й сумарний струм на елементах конструкції електролізера.

Методика складання енергобалансу при температурі доквілля описана в працях [31, 32]. На першому етапі виконується розрахунок густини внутрішніх джерел теплоти за даними електробалансу

$$q_{v \text{ под}} = \Delta u_{\text{под}} I / V_{\text{под}}, \quad q_{v \text{ ан}} = \Delta u_{\text{ан}} I / V_{\text{ан}},$$

де $q_{v \text{ под}}, q_{v \text{ ан}}$ – густина внутрішніх джерел теплоти подової та анодного вузла, відповідно, Вт/м³; $V_{\text{под}}, V_{\text{ан}}$ – об'єми подової та анодного вузла, відповідно, м³.

Потім визначається падіння напруги в МПЗ ($\Delta u_{\text{МПЗ}}, \text{В}$), яке йде на тепловтрати

$$\Delta u_{\text{МПЗ}} = \Delta u_{\text{ом МПЗ}} + \Delta u_{\text{ае}} + \Delta u_{\text{ел.хім}} (1 - \eta_T / 100) - \Delta u_{\text{АІ}} - \Delta u_{\text{в.газ}}. \quad (8.8)$$

Доданки (8.8) включають:

– омичне падіння напруги в МПЗ

$$\Delta u_{\text{ом МПЗ}} = \frac{1}{\chi} \frac{h_{\text{МПЗ}}}{f_{\text{ан.ф}} S_{\text{под.ан}}}, \quad (8.9)$$

де $h_{\text{МПЗ}}$ – міжполосний зазор, м; $f_{\text{ан.ф}}$ – коефіцієнт розкриття анода (або фактор збільшення площі підшви анода); $S_{\text{под.ан}}$ – площа підшви анода, м²;

– падіння напруги від анодних ефектів

$$\Delta u_{\text{ае}} = (u_{\text{ае}} - u_p) \nu_{\text{ае}} \tau_{\text{ае}} / 1440, \quad (8.10)$$

де u_{ae} – напруга анодних ефектів (АЕ), В; ν_{ae} – частота АЕ, од./доб; τ_{ae} – тривалість АЕ, хв; 1140 – кількість хвилин у добі;

– втрати падіння напруги з вилитим алюмінієм з врахуванням виходу за струмом

$$\Delta u_{Al} = \frac{M_{Al} [1,04(660 - t_{п}) + 400 + 1,18(t_{ел} - 660)] \eta_T}{I \cdot 100}, \quad (8.11)$$

де $t_{п}$ – температура оточуючого повітря, °С; $t_{ел}$ – температура електроліту, °С;

– втрати падіння напруги з відхідними газами з врахуванням виходу за струмом

$$\Delta u_{в.газ} = \frac{0,86M_{CO2}(t_{в.г} - t_{п}) + 1,05M_{CO}(t_{в.г} - t_{п}) \eta_T}{I \cdot 100}, \quad (8.12)$$

де $t_{в.г}$ – температура відхідних газів, °С.

Тоді внутрішнє джерело теплоти в МПЗ (у електроліті) визначається як

$$q_{в.МПЗ} = \Delta u_{ом.МПЗ} I / V_{МПЗ},$$

де $V_{МПЗ}$ – об'єм електроліту під підощвами анодів, м³.

Напруга від згоряння анодів з врахуванням виходу за струмом

$$\Delta u_{зг.ан} = \frac{9300M_{CO2} + 8800M_{CO} \eta_T}{I \cdot 100}. \quad (8.13)$$

Грійна напруга на електролізері

$$u_{гр} = \Delta u_{ом.МПЗ} + \Delta u_{ел.хім} + \Delta u_{ел} + \Delta u_{ан} + \Delta u_{под}. \quad (8.14)$$

Робоча напруга на електролізері

$$u_p = \Delta u_{ом.МПЗ} + \Delta u_{ел.хім} + \Delta u_{анод} + \Delta u_{под} + \Delta u_{ош}, \quad (8.15)$$

де $\Delta u_{ош}$ – падіння напруги в ошинуванні електролізера, В.

Середня напруга на електролізері

$$u_{ср} = u_{гр} + \Delta u_{ош.сер}, \quad (8.16)$$

де $\Delta u_{ош.сер}$ – падіння напруги в ошинуванні серії, В.

Питомі витрати електроенергії

$$w_{\text{пит}} = \frac{u_{\text{сп}}}{\gamma \frac{\eta_{\text{T}}}{100}} 1000.$$

Добова продуктивність алюмінієвого електролізера

$$M_{\text{Al}} = \frac{\gamma I}{1000} 24.$$

На другому етапі виконується ітераційний розрахунок температурного поля. Критерієм закінчення розрахунків є виконання умови

$$|t_i^{k+1} - t_i^k| \leq \varepsilon_t, i = \overline{1, M},$$

де k – номер ітерації; ε_t – абсолютна похибка розрахунку поля температури, °С; M – кількість вузлів.

Після розрахунків температурного поля визначаються параметри форми робочого простору ванни й температура електроліту в просторі борт-анод на повздовжній й поперечній сторонах.

На третьому етапі виконуються розрахунки теплових втрат. При розрахунках тепловтрат енергетичний контур електролізера обмежується зі сторони катода блямсами, а зі сторони анодного масиву – анодними траверсами для електролізерів ОА (штирями для електролізерів СА). Зовнішні поверхні катодного вузла підрозділяються на такі зони: днище; нижній пояс – рівень до блямсів; середній пояс – рівень подового блоку по його товщині; верхній пояс – рівень розплавів. Зовнішні поверхні анодного вузла підрозділяються на такі зони: глиноземна засипка; анодні ніпеля та траверси для ОА (верх й бічні поверхні анода та анодні штирі для СА). На відмічених поверхнях зон обчислюються середні значення температури й теплових потоків.

У прибуткові статті балансу на температуру довкілля входять: теплота від згорання вугільного аноду ($\Delta u_{\text{зг.ан}}$, В), ($\Delta u_{\text{зг.ан}} I$, кВт); теплота від підведеної електроенергії ($u_{\text{гр}}$, В), ($u_{\text{гр}} I$, кВт).

У видаткові статті балансу на температуру довкілля входять: електрохімічний процес ($E_{\text{Al}_2\text{O}_3} \frac{\eta_{\text{T}}}{100}$, В), ($E_{\text{Al}_2\text{O}_3} \frac{\eta_{\text{T}}}{100} \frac{I}{1000}$, кВт); тепловтрати з вилитим металом (Δu_{Al} , В), ($\Delta u_{\text{Al}} \frac{I}{1000}$, кВт); тепловтрати з відхідними газами ($\Delta u_{\text{відхідні гази}}$, В), ($\Delta u_{\text{відхідні гази}} \frac{I}{1000}$, кВт); тепловтрати анодного й катодного вузлів:

$$\{(\Delta u_{\text{МПЗ}} + \Delta u_{\text{ан}} + \Delta u_{\text{под}}), B\}, \{(\Delta u_{\text{МПЗ}} + \Delta u_{\text{ан}} + \Delta u_{\text{под}}) \frac{I}{1000}, \text{кВт}\}.$$

8.2. Методика складання теплового балансу камери печі випалювання та рекуперативного теплообмінника для підігріву повітря

8.2.1. Тепловий баланс камери печі випалювання

На підставі літературних даних [33] тепловий баланс камери багатокамерної печі (рис. 8.3), у якій забезпечуються умови проходження технологічного процесу за рахунок спалювання природного газу, описується рівнянням

$$Q_{\text{гор}} + Q_{\text{пов}} + Q_{\text{пал}} = Q_{\text{зав}} + Q_{\text{пер+фут}} + Q_{\text{вип}} + Q_{\text{хім}} + Q_{\text{неп}} + Q_{\text{т.втр}} + Q_{\text{відх.г}}, \quad (8.17)$$

де $Q_{\text{гор}} = BQ_{\text{н}}^{\text{р}}$ – теплота, що виділяється за рахунок згоряння природного газу, кВт; $Q_{\text{н}}^{\text{р}}$ – нижча робоча теплота згоряння природного газу, кДж/м³; B – витрати природного газу, м³/с; $Q_{\text{пов}} = L_{\alpha} h'_{\text{пов}}$ – теплота, що вноситься з підігрітим повітрям, кВт; L_{α} – дійсні витрати повітря, яке йде на горіння, м³/с; $h'_{\text{пов}}$ – ентальпія підігрітого повітря, кДж/нм³; $Q_{\text{пал}} = c_{\text{рпал}} T_{\text{пал}} B$ – теплота, що вноситься з природним газом, кВт; $c_{\text{рпал}}$ – об'ємна ізобарна теплоємність природного газу, кДж/(м³·К); $T_{\text{пал}}$ – температура природного газу, К; $Q_{\text{зав}}$ – теплота, що йде на нагрівання завантаження камери, кВт; $Q_{\text{пер+фут}}$ – теплота, що йде на нагрівання пересипки та футеровки камери, кВт; $Q_{\text{вип}}$ – теплота на випаровування води, кВт; $Q_{\text{хім}}$ – теплота на хімічні процеси, кВт; $Q_{\text{неп}}$ – втрати теплоти з неповнотою згоряння природного газу, кВт; $Q_{\text{т.втр}}$ – тепловтрати крізь огороження печі, відкриті люки та ін., кВт; $Q_{\text{відх.г}}$ – втрати теплоти з відхідними газами, кВт.

Зазвичай рівнянням типу (8.17) користуються для складання підсумкового теплового балансу багатокамерної печі на підставі експериментальних даних [33]. Якщо ж треба виконати складання теплового балансу на основі даних числових експериментів з використанням, наприклад, математичної постановки задачі (1.148)–(1.155) (див. п. 1.4, RANS), то рівняння (8.17) має де-що інший вигляд. При цьому методика ґрунтується на складанні миттєвого балансу печі, а для отримання підсумкового – застосовується просте підсумовування.

Розглянемо рівняння миттєвого балансу камери для малого інтервалу часу ($\Delta \tau_k$, с)

$$\Delta\tau_k = \tau_{k+1} - \tau_k, \quad k = \overline{1, M-1},$$

де $M-1$ – кількість інтервалів на які розбивається час технологічного циклу камери (τ_t, c); $\Delta\tau_k \ll \tau_t$.

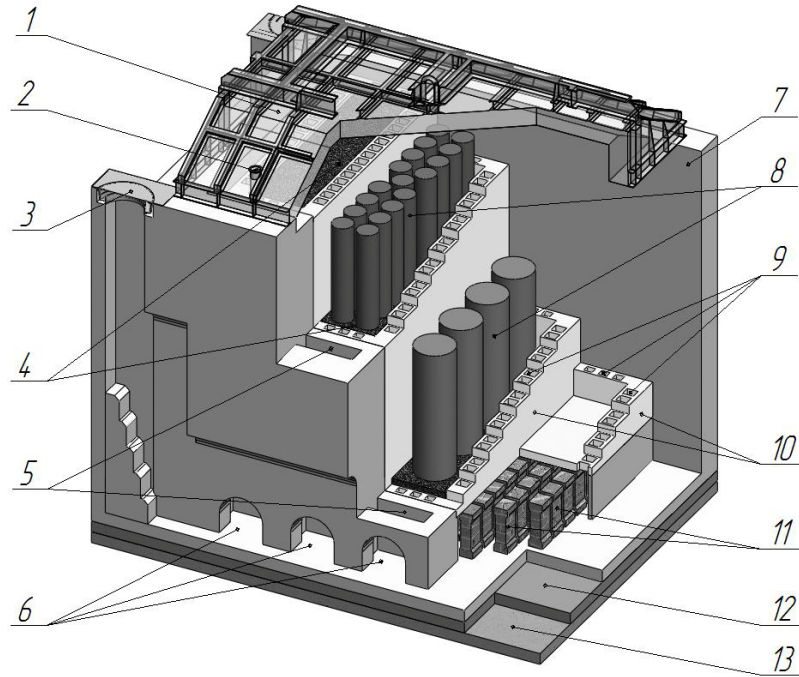


Рис. 8.3. Камера печі випалу: 1 – склепіння; 2 – місця встановлення пальників; 3 – канал для відводу димових газів; 4 – пересипка; 5 – вогневі канали; 6 – вікна входу димових газів із попередньої камери; 7 – вогнетривка футеровка камери; 8 – вуглеграфітові заготовки; 9 – муфельні канали; 10 – касети; 11 – стовпчики подини касети; 12 – цегляна кладка; 13 – бетон

У прибуткові статті миттєвого теплового балансу камери входять: теплота від згоряння природного газу; теплота підведена до камери з димовими газами від попередньої камери. У видаткові статті входять: теплота акумульована завантаженням, пересипкою й футеровкою камери; тепловтрати в оточуюче середовище; втрати теплоти з відхідними газами камери [34]

$$\left[Q_{CH_4} + H_{\text{дим.газ}} + Q_{\text{рад.д.г}} \right]_k = \left[\Delta H_{\text{зав}} + \Delta H_{\text{пер}} + \Delta H_{\text{фут}} + Q_{\text{т.втр}} + H_{\text{відх.г}} + Q_{\text{рад.відх.г}} \right]_k, \quad (8.18)$$

де $Q_{CH_4} = \Delta\tau_k \left[G_{\text{inlet-CH}_4} Q_i^p \right]$ – теплота від згоряння природного газу, Дж;

$H_{\text{дим.газ}} = \Delta\tau_k \left[\frac{G_{\text{inlet}}}{F_{\text{inlet}}} \int_0^{F_{\text{inlet}}} (\bar{h}) dF \right]$ – теплота підведена до камери з димовими газами

від попередньої камери, Дж; $H_{\text{відх.г}} = \Delta\tau_k \left[\frac{G_{\text{outlet}}}{F_{\text{outlet}}} \int_0^{F_{\text{outlet}}} (\bar{h}) dF \right]$ – втрати теплоти з

відхідними газами камери, Дж; $F_{\text{inlet}}, F_{\text{outlet}}$ – площа вхідного й відхідного січення газового тракту камери, відповідно, м^2 ; $G_{\text{inlet-CH}_4}$ – витрата природного газу через пальники камери, кг/с ; $G_{\text{inlet}}, G_{\text{outlet}}$ – витрати димових газів у вхідному й відхідному січеннях газового тракту камери, відповідно, кг/с ;
 $G_{\text{outlet}} = G_{\text{inlet}} + G_{\text{inlet-CH}_4}$; $\bar{\rho} = \frac{(\rho)_{\tau_k + \Delta\tau_k} + (\rho)_{\tau_k}}{2}$, $\bar{h} = \frac{(h)_{\tau_k + \Delta\tau_k} + (h)_{\tau_k}}{2}$ – середнє значення густини (кг/м^3) і масової ентальпії (Дж/кг) димових газів у вхідному й відхідному січеннях газового тракту камери за інтервал часу $\Delta\tau_k$;
 $Q_{\text{рад.д.г}} = \bar{q}_{\text{рад.д.г}} F_{\text{inlet}} \Delta\tau_k$ – теплота, що пов'язана з радіаційним потоком у вхідному перетині газових каналів, Дж; $\bar{q}_{\text{рад.д.г}}$ – середня густина радіаційного теплового потоку у вхідному перетині газових каналів на інтервалі $\Delta\tau_k$, Вт/м^2 ;
 $Q_{\text{рад.відх.г}} = \bar{q}_{\text{рад.відх.г}} F_{\text{outlet}} \Delta\tau_k$ – теплота, яка пов'язана з радіаційним потоком у відхідному перетині газових каналів, Дж; $\bar{q}_{\text{рад.відх.г}}$ – середня густина радіаційного теплового потоку у відхідному перетині газових каналів на інтервалі $\Delta\tau_k$, Вт/м^2 ;
 $\Delta H_{\text{зав}} = \left[\int_0^{V_{\text{зав}}} (\rho h)_{\text{зав}} dV \right]_{\tau_k + \Delta\tau_k} - \left[\int_0^{V_{\text{зав}}} (\rho h)_{\text{зав}} dV \right]_{\tau_k}$ – теплота акумульована на завантаженні камери за час $\Delta\tau_k$, Дж; $V_{\text{зав}}$ – об'єм завантаження камери, кг ;
 $\Delta H_{\text{пер}} = \left[\int_0^{V_{\text{пер}}} (\rho h)_{\text{пер}} dV \right]_{\tau_k + \Delta\tau_k} - \left[\int_0^{V_{\text{пер}}} (\rho h)_{\text{пер}} dV \right]_{\tau_k}$ – теплота акумульована пересипкою камери за час $\Delta\tau_k$, Дж; $V_{\text{пер}}$ – об'єм пересипки камери, кг ;
 $\Delta H_{\text{фут}} = \left[\int_0^{V_{\text{фут}}} (\rho h)_{\text{фут}} dV \right]_{\tau_k + \Delta\tau_k} - \left[\int_0^{V_{\text{фут}}} (\rho h)_{\text{фут}} dV \right]_{\tau_k}$ – теплота акумульована футеровкою камери за час $\Delta\tau_k$, Дж; $V_{\text{фут}}$ – об'єм футеровки камери, кг ;
 $Q_{\text{т.втр}} = \Delta\tau_k \int_0^{F_{\text{огор}}} q_{\text{т.втр}} dF$ – тепловтрати в оточуюче середовище, Дж; $F_{\text{огор}}$ – площа огороження камери, яка контактує з оточуючим середовищем, м^2 ;
 $\bar{q}_{\text{т.втр}} = \frac{(q_{\text{т.втр}})_{\tau_k + \Delta\tau_k} + (q_{\text{т.втр}})_{\tau_k}}{2}$ – середнє значення густини теплового потоку за інтервал часу $\Delta\tau_k$, Вт/м^2 ; $q_{\text{т.втр}} = \alpha_{\text{eff}} (T_{\text{п.огор}} - T_{\text{env.sp}})$; α_{eff} – ефективний коефіцієнт тепловіддачі, $\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$; $T_{\text{п.огор}}$ – температура поверхні огороження камери, К ; $T_{\text{env.sp}}$ – температура оточуючого середовища, К .

Для отримання підсумкового теплового балансу камери багатокамерної печі виконаємо сумування (8.18)

$$\sum_{k=1}^{M-1} [Q_{\text{CH}_4} + H_{\text{дим.газ}}]_k = \sum_{k=1}^{M-1} [\Delta H_{\text{зав}} + \Delta H_{\text{пер}} + \Delta H_{\text{фут}} + Q_{\text{т.втр}} + H_{\text{відх.г}}]_k. \quad (8.19)$$

8.2.2. Тепловой баланс рекуператора

Рівняння теплового балансу рекуператора, наприклад, для підігріву повітря за рахунок теплоти димових газів (рис. 8.4) можна записати у вигляді

$$Q_{\text{газ.вх}} - Q_{\text{газ.вих}} = Q_{\text{пов.вих}} - Q_{\text{пов.вх}} + Q_{\text{т.втр}}, \quad (8.20)$$

де $Q_{\text{газ.вх}} = \frac{G_{\text{газ}}}{F_{\text{газ}}} \int_0^{F_{\text{газ}}} (h_{\text{газ.вх}}) dF + Q_{\text{рад.вх}}$ – теплота, яка надходить у рекуператор

з димовими газами, Вт; $Q_{\text{газ.вих}} = \frac{G_{\text{газ}}}{F_{\text{газ}}} \int_0^{F_{\text{газ}}} (h_{\text{газ.вих}}) dF + Q_{\text{рад.вих}}$ – теплота димових газів, що виходять з рекуператора, Вт; $Q_{\text{рад.вх}} / Q_{\text{рад.вих}}$ – радіаційний тепловий потік на вході й виході газового тракту рекуператора, відповідно, Вт; $F_{\text{газ}}$ – площа січення газового каналу на виході і на вході рекуператора, м²; $G_{\text{газ}}$ – витрата димових газів, кг/с; $h_{\text{газ.вх}} / h_{\text{газ.вих}}$ – масова ентальпія (Дж/кг) димових газів у вхідному й вихідному січеннях газового каналу; $Q_{\text{т.втр}}$ –

втрати теплоти в оточуюче середовище, Вт; $Q_{\text{пов.вх}} = \frac{G_{\text{пов.}}}{F_{\text{пов.}}} \int_0^{F_{\text{пов.}}} (h_{\text{пов.вх}}) dF$ – теплота, яка поступає в рекуператор з повітрям, Вт;

$Q_{\text{пов.вих}} = \frac{G_{\text{пов.}}}{F_{\text{пов.}}} \int_0^{F_{\text{пов.}}} (h_{\text{пов.вих}}) dF$ – теплота повітря, яке виходить з рекуператора, Вт; $F_{\text{пов.}}$ – площа січення повітряного каналу на виході і на вході рекуператора, м²; $G_{\text{пов.}}$ – витрата повітря, кг/с; $h_{\text{пов.вх}} / h_{\text{пов.вих}}$ – масова ентальпія (Дж/кг) повітря у вхідному й вихідному січеннях повітряного каналу.

Приклад складання балансу рекуператора (див. рис. 8.4) на підставі проведених розрахунків його тепло-гідродинамічного стану з використанням програмного продукту ANSYS FLUENT.

Вихідні дані для розрахунку теплового балансу рекуператора

$$F_{\text{газ}} = 18,87 \text{ м}^2;$$

$$G_{\text{газ}} = 22 \text{ кг/с}; \quad \int_0^{F_{\text{газ}}} (h_{\text{газ.вх}}) dF = 2,3 \cdot 10^7 \text{ (Дж/кг) \cdot м}^2;$$

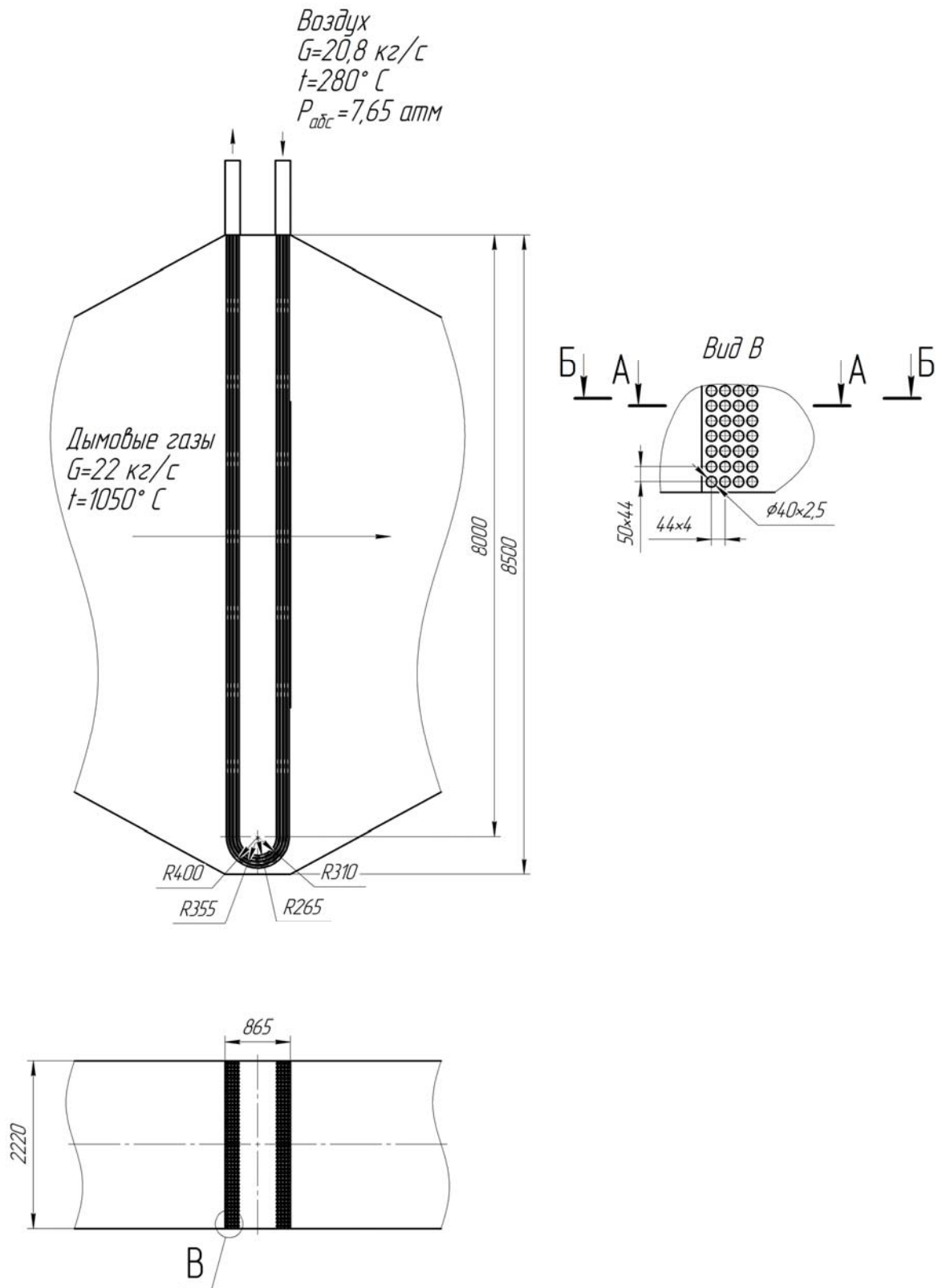


Рис. 8.4. Рекуператор для підігріву повітря димовими газами

$$\int_0^{F_{\text{газ}}} (h_{\text{газ.вихід}}) dF = 1,742 \cdot 10^7 \text{ (Дж/кг)} \cdot \text{м}^2$$

$$Q_{\text{рад}} = Q_{\text{рад.вхід}} - Q_{\text{рад.вихід}} = 1,636 \text{ МВт};$$

$$F_{\text{пов.}} = 0,444 \text{ м}^2;$$

$$G_{\text{пов.}} = 20,8 \text{ кг/с};$$

$$\int_0^{F_{\text{пов}}} (h_{\text{пов.вхід}}) dF = 1,154 \cdot 10^5 \text{ (Дж/кг)} \cdot \text{м}^2;$$

$$\int_0^{F_{\text{пов}}} (h_{\text{пов.вихід}}) dF = 2,889 \cdot 10^5 \text{ (Дж/кг)} \cdot \text{м}^2;$$

$$Q_{\text{т.втрати}} = 4440 \text{ Вт.}$$

Розрахунок теплового балансу:

$$Q_{\text{газ.вхід}} = \frac{G_{\text{газ}}}{F_{\text{газ}}} \int_0^{F_{\text{газ}}} (h_{\text{газ.вхід}}) dF + Q_{\text{рад}} = \frac{22}{18,87} 2,3 \cdot 10^7 + 1,634 \cdot 10^6 = 28,45 \text{ МВт};$$

$$Q_{\text{газ.вихід}} = \frac{G_{\text{газ}}}{F_{\text{газ}}} \int_0^{F_{\text{газ}}} (h_{\text{газ.вихід}}) dF = \frac{22}{18,87} 1,742 \cdot 10^7 = 20,31 \text{ МВт};$$

$$Q_{\text{пов.вхід}} = \frac{G_{\text{пов.}}}{F_{\text{пов.}}} \int_0^{F_{\text{пов}}} (h_{\text{пов.вхід}}) dF = \frac{20,8}{0,444} 1,154 \cdot 10^5 = 5,401 \text{ МВт};$$

$$Q_{\text{пов.вихід}} = \frac{G_{\text{пов.}}}{F_{\text{пов.}}} \int_0^{F_{\text{пов}}} (h_{\text{пов.вихід}}) dF = \frac{20,8}{0,444} 2,889 \cdot 10^5 = 13,52 \text{ МВт};$$

$$Q_{\text{газ.вхід}} - Q_{\text{газ.вихід}} = 28,45 - 20,31 = 8,14 \text{ МВт};$$

$$Q_{\text{пов.вихід}} - Q_{\text{пов.вхід}} + Q_{\text{т.втрати}} = 13,52 - 5,4 + 0,00444 = 8,1244 \text{ МВт.}$$

Небаланс

$$\left(1 - \frac{Q_{\text{газ.вхід}} - Q_{\text{газ.вихід}}}{Q_{\text{пов.вихід}} - Q_{\text{пов.вхід}} + Q_{\text{т.втрати}}} \right) 100\% = \left(1 - \frac{8,14}{8,1244} \right) 100\% = 0,155\% .$$

Запитання для самоконтролю

1. Структурна схема енергобалансу на температуру довкілля алюмінієвого електролізера ОА.
2. З яких основних конструкційних елементів складається алюмінієвий електролізер.
3. Основні етапи складання електричного балансу електролізера ОА.
4. Прибуткові й видаткові статті енергобалансу на температуру довкілля електролізера ОА.
5. Співвідношення для визначення питомих витрат електроенергії алюмінієвого електролізера.
6. Різниця між грійною, робочою та середньою напругами алюмінієвого електролізера.
7. Добова продуктивність алюмінієвого електролізера.
8. З яких основних конструкційних елементів складається камера печі випалу електродних заготовок.
9. Прибуткові й видаткові статті теплового балансу камери печі випалу.
10. Методика визначення складових теплового балансу печі.
11. Миттєвий й підсумковий теплові баланси камери багатокammerної печі.
12. Прибуткові й видаткові статті теплового балансу рекуператора.
13. Методика визначення складових теплового балансу рекуператора.

9. ПРИКЛАДИ ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ДЛЯ РОЗРОБКИ ЕНЕРГОЗБЕРІГАЮЧИХ КОНСТРУКЦІЙ І РЕГЛАМЕНТІВ ЕКСПЛУАТАЦІЇ ПРОМИСЛОВОГО ОБЛАДНАННЯ

9.1. Модернізація рекуператора скловарної печі продуктивністю 12–14 тонн за добу скломаси

9.1.1. Постановка задачі

У промисловості за температури відхідних газів понад 1050 °С отримали широке застосування радіаційні повітряні рекуператори. Радіаційні рекуператори бувають трьох основних типів (рис. 9.1): щілинні, трубчасті та комбіновані, які складаються з двох ступенів (перша – щілинна, а друга трубчаста). У всіх радіаційних рекуператорах зазвичай застосовується прямоточна схема. Це робиться з метою покращення температурних умов експлуатації огорожувальних металоконструкцій у зоні гарячих газів. Металоконструкції рекуператорів зовні покриваються високотемпературним теплоізолятором товщиною порядку 100–150 мм (наприклад, базальтовою ватою марки БСТВ – базальтове супертонке волокно) з температурою застосування до 1000 °С, теплопровідністю 0,033–0,038 Вт/(м·К) і густиною 80–100 кг/м³).

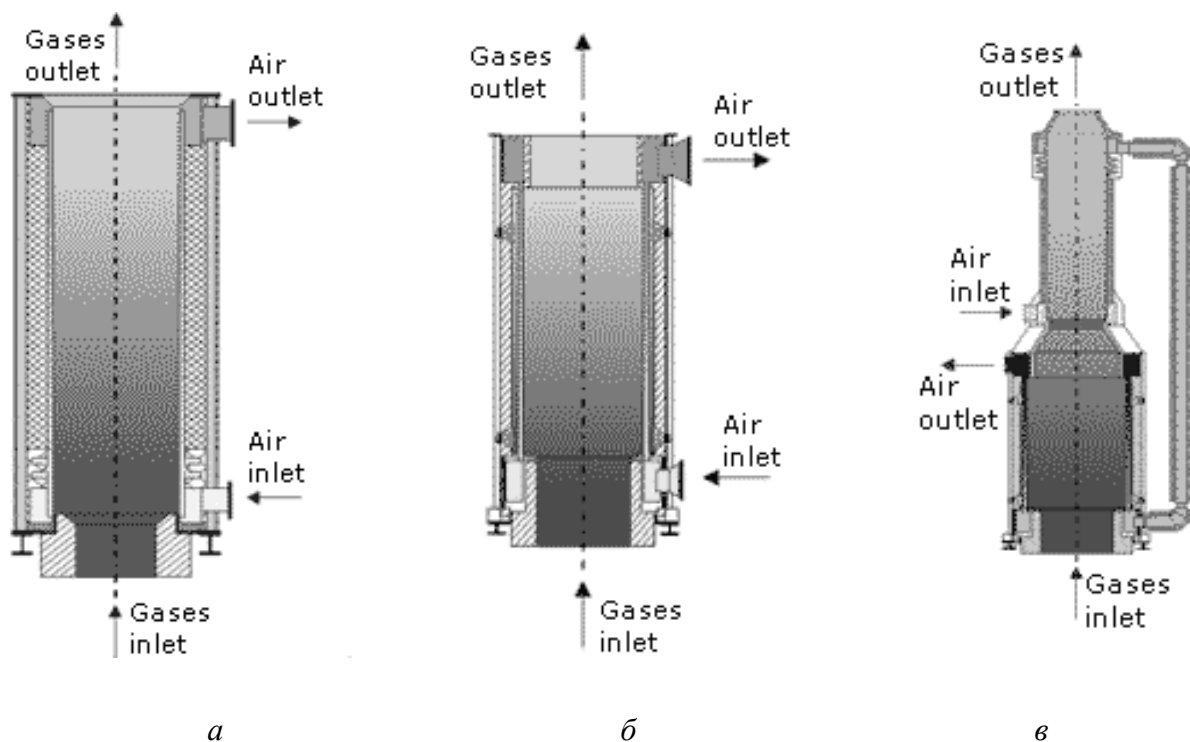


Рис. 9.1. Типи радіаційних рекуператорів: *а* – щілинний; *б* – трубчастий; *в* – комбінований

Розглянемо можливі варіанти модернізації конструкції рекуператора скловарної печі на прикладі радіаційного рекуператора щілинного типу (рис. 9.2).



Рис. 9.2. Рекуператор щілинного типу

Для описання тепло-гідродинамічного стану радіаційного рекуператора щілинного типу застосовується математична постановка (1.148)–(1.155) (див. п. 1.4, RANS), яка включає як інтегро-диференціальні рівняння (інтегральна характеристика спричинюється наявністю радіаційного члена в рівнянні енергії системи рівнянь (1.148)), так і необхідні крайові умови.

9.1.2. Вихідні дані для теплового розрахунку рекуператора

Вихідні дані для теплового розрахунку записуються при нормальних умовах [33, 36] (тобто при $t = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$ і $p = 1$ бар). Температура димових газів перед рекуператором становить $1200\text{ }^{\circ}\text{C}$, а температура повітря на вході в рекуператором $20\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Об'ємна витрата природного газу [33]

$$B = \frac{Pq_x}{Q_{\text{н}}^{\text{р}}\eta} = \frac{500 \times 2895}{34500 \times 0,17} = 247\text{ м}^3/\text{ч}, \quad (9.1)$$

де P – продуктивність печі, кг/ч; q_x – сумарна теплота, яка витрачається на процес склоутворення, кДж/кг; $Q_{\text{н}}^{\text{р}}$ – нижча робоча теплота згоряння природного газу, кДж/м³; η – ККД печі.

Коефіцієнт надлишку повітря $\alpha = 1,2$.

Витрата вологого повітря, що йде на горіння природного газу [33]

$$\begin{aligned} V_{\text{air}} &= BL'_{\alpha} = 247 \times 11,48 = 2835,6 \text{ м}^3/\text{ч}, \\ G_{\text{air}} &= 2835,6 \times 1,205 = 3416,85/3600 = 0,949 \text{ кг/с}, \end{aligned} \quad (9.2)$$

де L'_{α} – дійсна витрата атмосферного повітря з врахуванням його вологовмісту та заданого коефіцієнта надлишку повітря, $\text{м}^3/\text{м}^3$; G_{air} – масова витрата атмосферного повітря, кг/с .

Витрата димових газів [33]

$$\begin{aligned} V_{\text{smoke fumes}} &= BV_{\alpha} = 247 \times 12,5 = 3087,5 \text{ м}^3/\text{ч}, \\ G_{\text{smoke fumes}} &= 3087,5 \times 1,226 = 3785,3/3600 = 1,051 \text{ кг/с}, \end{aligned} \quad (9.3)$$

де V_{α} – загальна кількість продуктів горіння, $\text{м}^3/\text{м}^3$; $G_{\text{smoke fumes}}$ – масова витрата димових газів, кг/с .

Таким чином, за вихідні дані для проведення теплового розрахунку рекуператора радіаційного типу, маємо:

- на вході повітряного тракту – $G_{\text{air}} = 0,949 \text{ кг/с}$, $T_{\text{air}} = 293 \text{ К}$;
- на вході газового тракту – $G_{\text{smoke fumes}} = 1,05 \text{ кг/с}$, $T_{\text{smoke fumes}} = 1473 \text{ К}$.

9.1.3. Варіанти числового аналізу тепло-гідродинамічного стану різних конструкцій рекуператора

Для зіставлення результатів розрахунків за техніко-економічними показниками роботи рекуператорів скловарної печі теплові розрахунки проводились за такими варіантами:

1) варіант 1 – базова конструкція – одноступінчатий радіаційний щілинний рекуператор (рис. 9.3,а);

2) варіант 2 – модернізована конструкція – одноступінчатий радіаційний трубчастий рекуператор (рис. 9.3,б);

3) варіант 3 – модернізована конструкція – двохступінчатий радіаційний щілинний рекуператор. У цьому теплообміннику застосовуються два рекуператори базової конструкції, що встановлюються послідовно одна над другою. Причому перша верхня ступінь за повітрям протитокова, а друга – прямоточна (рис. 9.4,а);

4) варіант 4 – як варіант 3, тільки обидві ступені за повітрям працюють за прямоточною схемою (рис. 9.4,б).

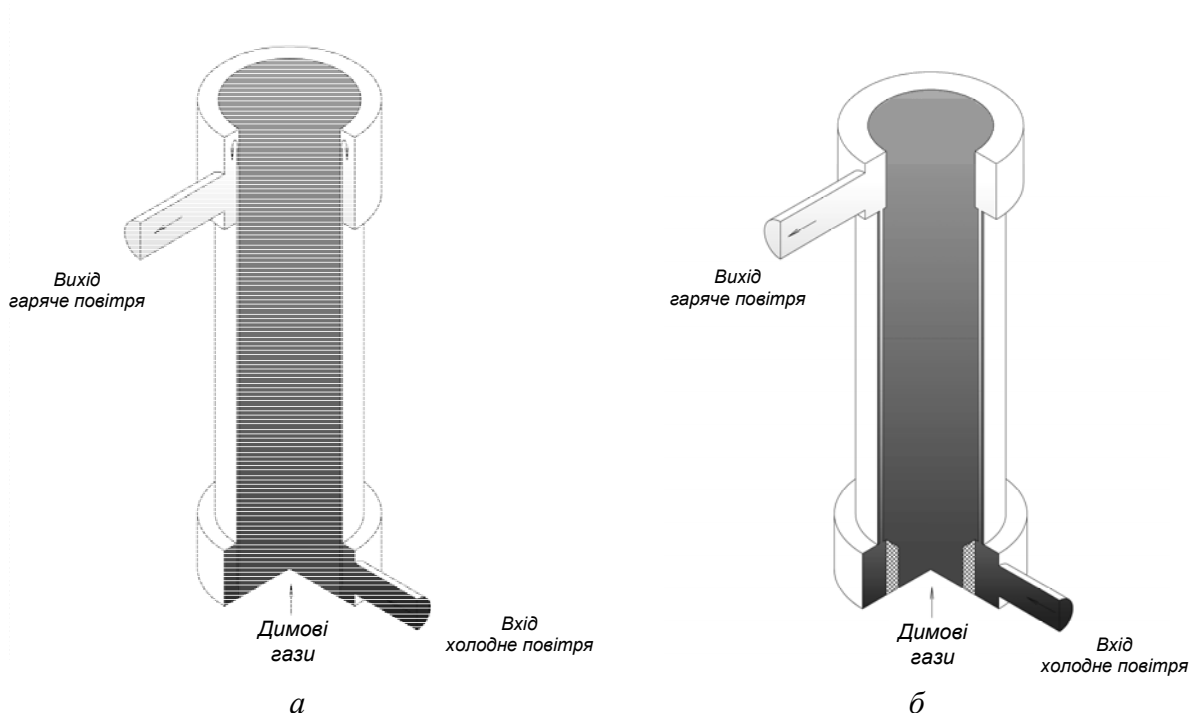


Рис. 9.3. Варіанти конструкцій радіаційного рекуператора для підігріву повітря:
а – щілинний (варіант 1 – базовий); *б* – трубчастий (варіант 2)

9.1.4. Результати числового аналізу фізичних полів різних конструкцій радіаційного рекуператора

Числовий аналіз тепло-гідродинамічного стану виконано за допомогою програмного продукту ANSYS FLUENT. Відповідні числові моделі радіаційних рекуператорів були побудовані на підставі твердотільних моделей (див. рис. 9.3, 9.4), вихідних даних (див. п. 9.1.2). Фізичні властивості теплоносіїв задавались залежно від температури. З метою спрощення процедури дискретизації твердотільних моделей та значного зменшення числа невідомих (розрахункових комірок – cells) металеві конструкції рекуператорів не будувались, а замість цього застосовувались можливості ANSYS FLUENT із задання товщини стінок та їх матеріалів у граничних умовах, використовуючи при цьому опції: Wall Thickness, Shell Conduction, Material Name.

Результати тепло-гідродинамічних розрахунків зведені в табл. 9.1 та наведені на рис. 9.5.

Для варіанту 4 також були виконані розрахунки на міцність (рис. 9.6, 1.7). Для описання напружено-деформованого стану (НДС) радіаційного рекуператора щілинного типу під дією температурного навантаження використовувалася математична постановка (7.11)–(7.16) (див. п. 7.2). Для виконання розрахунків НДС застосовувався програмний продукт ANSYS Mechanical APDL. При цьому розрахункова сітка та температурні поля імпортувались із розв'язку ANSYS FLUENT. Розрахунки на міцність проведені з врахуванням границі плинності жароміцної сталі 12X17 $\sigma_T = 245$ МПа.

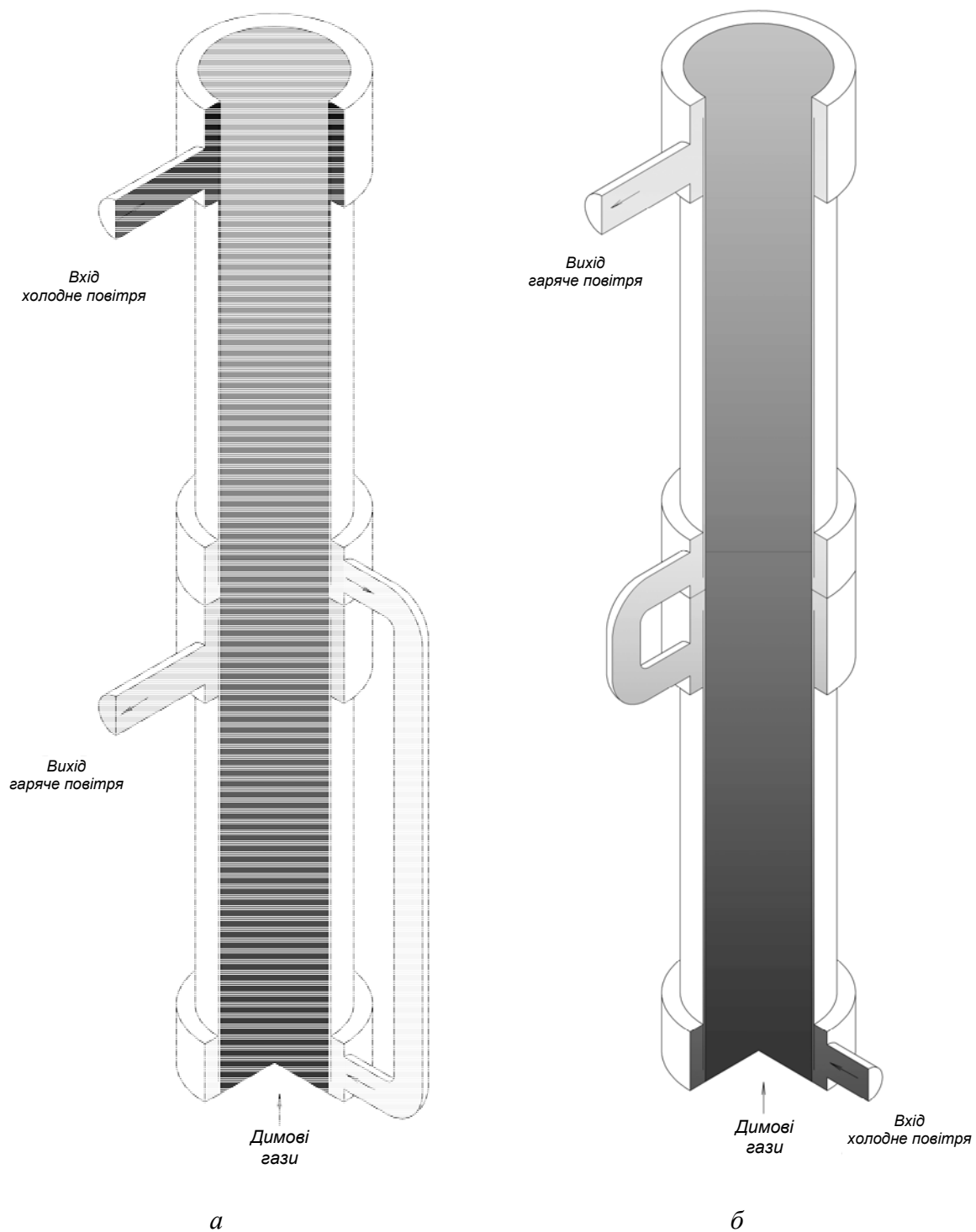


Рис. 9.4. Варіанти конструкцій двохступінчатого щільного радіаційного рекуператора для підігріву повітря: *a* – комбінована протитокова-прямоточна схема (варіант 3);
б – прямоточна схема (варіант 4)

Таблиця 9.1. Зіставлення показників роботи рекуператорів різних конструкцій*

№ варіанту	F^{**} , м ²	$t_{\text{air in}} / t_{\text{air out}}$, °C	$t_{\text{gas in}} / t_{\text{gas out}}$, °C	\bar{q} , кВт/м ²	$\bar{\alpha}_k / \Delta t_{\text{midl gas-air}}$, Вт/(м ² ·К)/°C	$\Delta P_{\text{air}} / \Delta P_{\text{gas}}$, Па/Па
Вар. 1	17,9	20/390	1200/991	26,7	(25 – 71)/858	1578/0
Вар. 2	11,6	20/368	1200/1145	21,4	55,0/932	3263/0
Вар. 3 I ст.	17,9	20/332	1050/917	22,6	(23 – 69)/883	1706/0
II ст.	17,9	332/632	1200/1050	22,9	(27 – 81)/701	2327/0
	$\Sigma 35,8$					$\Sigma 4033$
Вар. 4 I ст.	17,9	20/390	1200/991	26,7	(25 – 71)/858	1578/0
II ст.	17,9	390/565	991/876	13,3	(25 – 82)/442	2125/0
	$\Sigma 35,8$					$\Sigma 3703$

Примітки: * – розрахунки проведені з врахуванням поглинання димових газів $k = 0,05 \text{ м}^{-1}$ у «сірому» наближенні середовища; **) F – площа поверхні теплообміну димові гази–повітря; $t_{\text{air in}} / t_{\text{air out}}$ – температури повітря на вході й виході із рекуператора, відповідно; $t_{\text{gas in}} / t_{\text{gas out}}$ – температури димових газів на вході й виході з рекуператора, відповідно; \bar{q} – густина теплового потоку на поверхні теплообміну димові гази–повітря; $\bar{\alpha}_k / \Delta t_{\text{midl gas-air}}$ – середній конвективний коефіцієнт тепловіддачі на поверхні теплообміну димові гази–повітря і середня різниця температурного напору в рекуператорі, відповідно; $\Delta P_{\text{air}} / \Delta P_{\text{gas}}$ – падіння статичного тиску (напору) у повітряному і газовому тракту рекуператора, відповідно.

Аналіз результатів проведених розрахунків показує, що:

– рекуператор базової конструкції (варіант 1, рис. 9.2, 9.3,а, 9.5, табл. 9.1), повинен гарантовано забезпечити нагрів повітря до температури 390 °C;

– трубчатий рекуператор (варіант 2, рис. 9.3,б, табл. 9.1) з тією ж поверхнею нагрівання, що й рекуператор базової конструкції, не забезпечує підвищення температури повітря, що підігрівається, порівняно з варіантом 1;

– двохступінчатий щільний рекуператор (варіант 3, рис. 9.4,а, табл. 9.1) повинен забезпечити нагрів повітря до температури біля 630 °C, що більше ніж у 1,5 рази за базовий варіант. Однак при цьому необхідне придбання ще одного рекуператора базової конструкції;

– двохступінчатий щільний прямоточний рекуператор (варіант 4, рис. 9.4,а, табл. 9.1) має забезпечити нагрів повітря до температури біля 565 °C, що в 1,45 рази більше за базовий варіант, але значно менше, ніж у варіанті 3. Однак варіант 4 порівняно з варіантом 3 має певні переваги в частині забезпечення кращих температурних умов роботи металоконструкцій рекупе-

ратора (максимум температури знаходиться у верхніх частинах обох ступенів рекуператора) та гідравлічного опору за повітряним трактом (див. табл. 9.1). При цьому теплове навантаження на верхню ступень рекуператора у варіанті 4 складає 181 кВт, у той час як у варіанті 3 – 306 кВт.

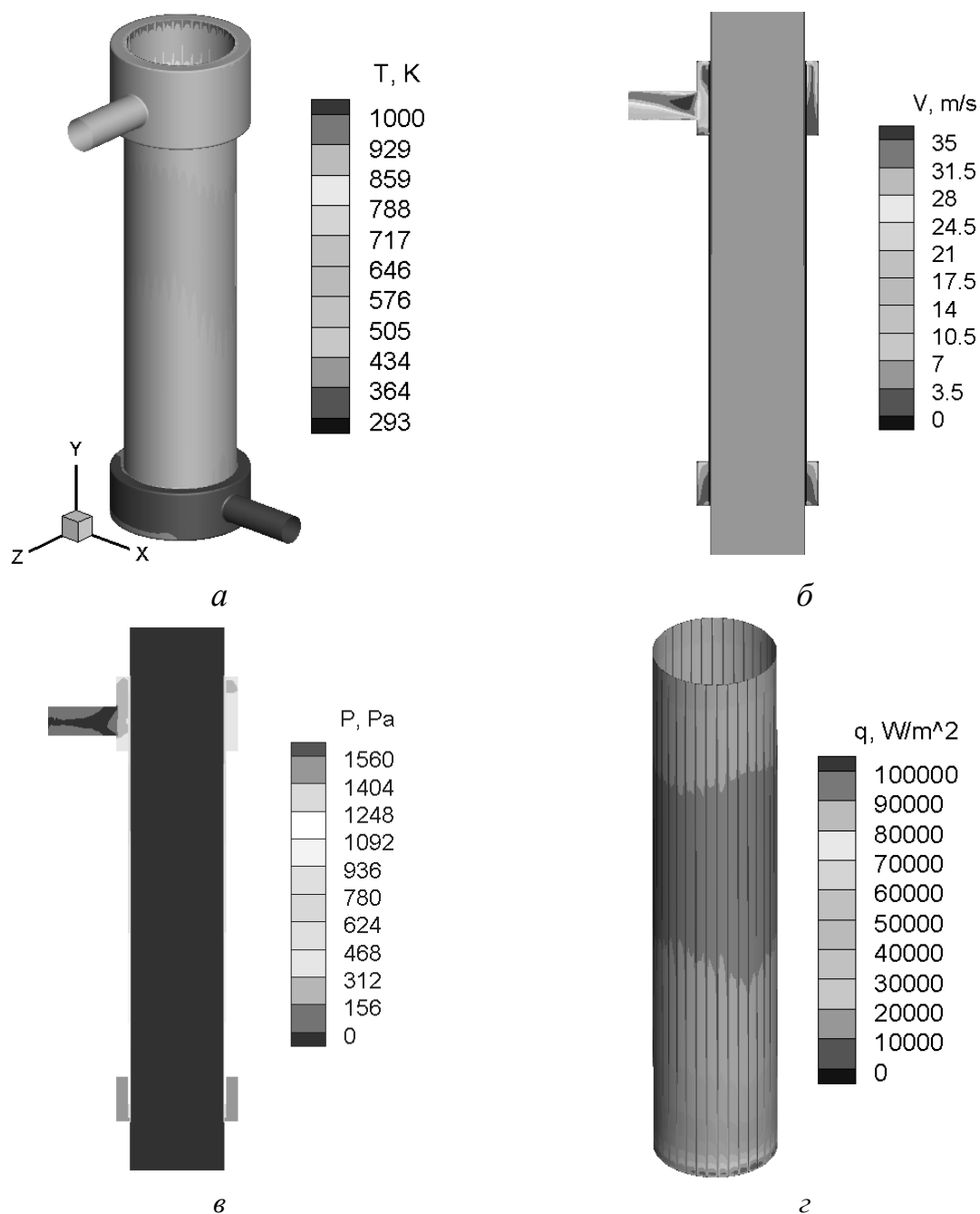


Рис. 9.5. Результати розрахунків фізичних полів радіаційного щілинного рекуператора базової конструкції (варіант 1, з врахування ребрення внутрішньої обичайки щілинного зазору і коефіцієнта поглинання димових газів): *a* – поле температур металоконструкцій рекуператора; *б* – поле швидкості в центральному січенні рекуператора; *в* – поле статичного тиску в центральному січенні рекуператора; *г* – поле густини теплового потоку на поверхні теплообміну димові гази–повітря

9.1.5. Оцінка економічної ефективності конструкцій рекуператорів

Економія природного газу (ΔB , м³/ч) за рахунок підвищення температури підігріву повітря, яке йде на горіння, можна розрахувати за формулами:

$$\Delta B = \frac{G_{\text{air}} \Delta h}{3600 Q_{\text{H}}^{\text{P}}} \quad \text{або} \quad \Delta B = \frac{G_{\text{air}} c_p \Delta T}{3600 Q_{\text{H}}^{\text{P}}}, \quad (9.4)$$

де $\Delta h = h_2 - h_1 = \int_0^{T_2} c_p(T) dT - \int_0^{T_1} c_p(T) dT$ або при $c_p = \text{const}$ маємо, що $\Delta h \approx c_p \Delta T$ – різниця ентальпій повітря, Дж/кг; h_1, h_2 – ентальпія повітря при температурах T_1 і T_2 , відповідно, Дж/кг; c_p – масова теплоємність повітря, Дж/(кг·К); $\Delta T = T_2 - T_1$ – різниця температур підігріву повітря (порівняно з базовим варіантом (варіант 1)), К (°C); Q_{H}^{P} – нижча теплота згоряння природного газу, Дж/м³; G_{air} – масова витрата атмосферного повітря, що йде на горіння, кг/с.

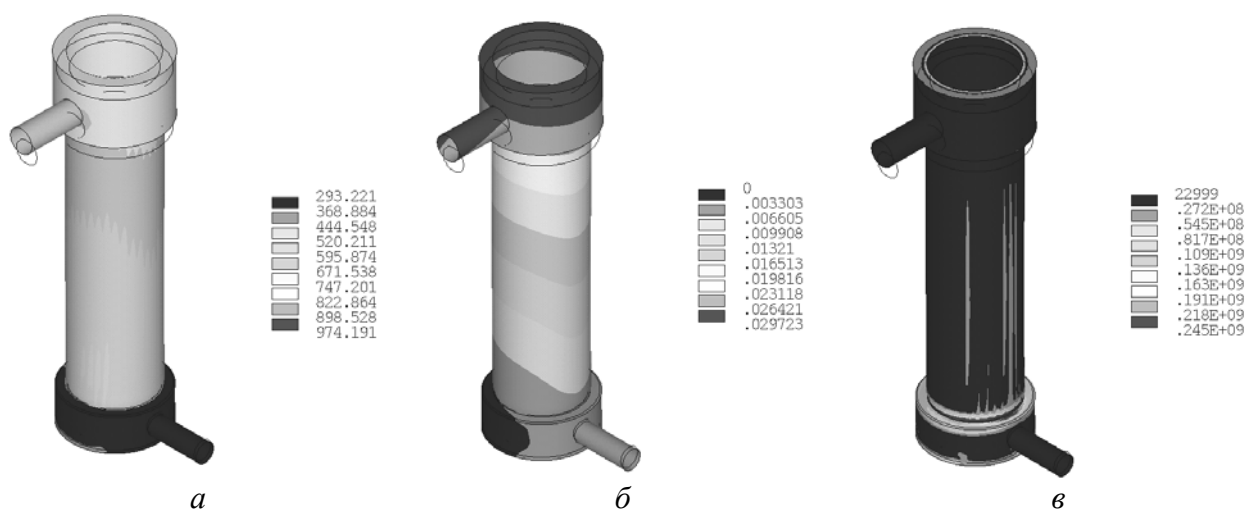
З використанням співвідношення (9.4) нескладно провести оцінку економії природного газу за рахунок застосування модернізованих конструкцій радіаційних рекуператорів за варіантами 3 і 4. Результати цих розрахунків зведені в табл. 9.2.

Таблиця 9.2. Техніко-економічні показники роботи модернізованих конструкцій радіаційних рекуператорів

Варіант модернізації	$\Delta T = T_2 - T_1$, °C	ΔB , (м ³ /год)/ (м ³ /доб.)	$\Delta B_{\text{рік}}$, тис. м ³ /рік	ΔE^1 , \$/рік
варіант 3	242	24,8/596,5	217,7	125 195
варіант 5	175	17,9/431,4	157,4	90 533

¹ Ціна на природний газ у промисловості становить 4600 грн за 1000 м³ або \$575 (інтернет-ресурс: <http://www.epravda.com.ua/news/2011/11/4/304308/>).

Кожух



Внутрішня обичайка з ребрами

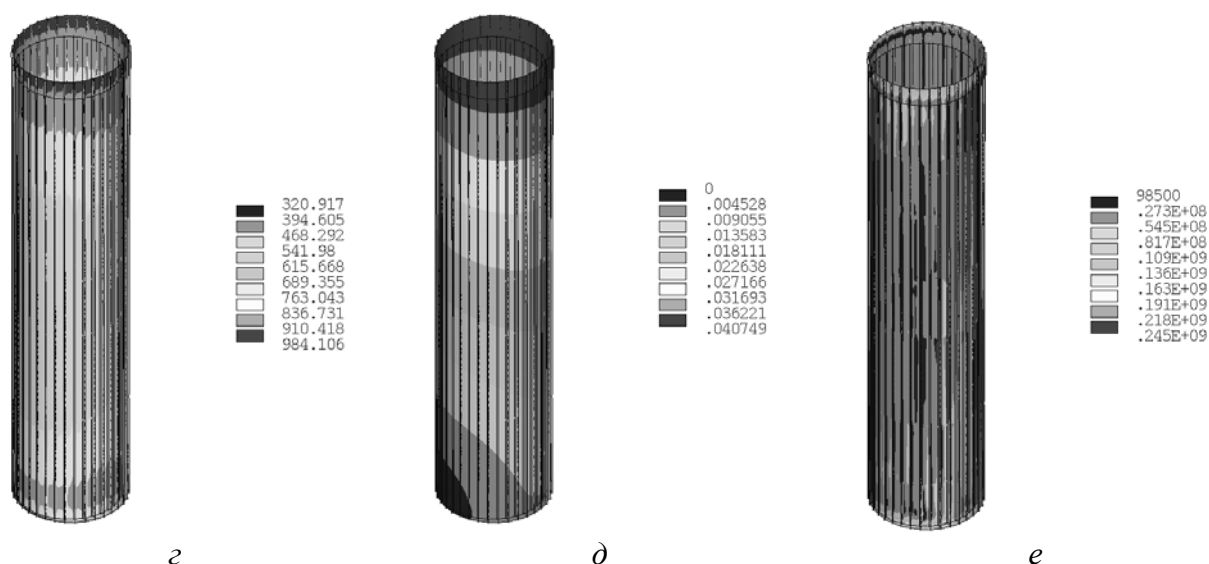
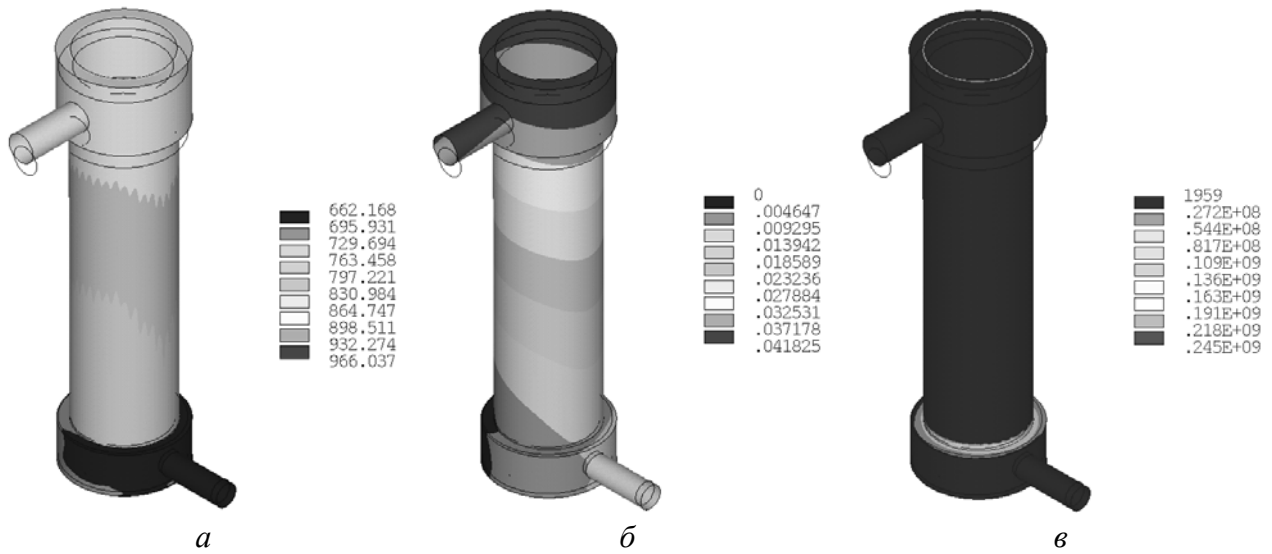


Рис. 9.6. Результати розрахунків на міцність рекуператора за варіантом 4; перша нижня ступінь – жароміцна сталь 12Х17, лист товщиною 6 мм (також показано недеформований контур); залишкові пластичні деформації можливі в нижній частині кожуха та на ребрах внутрішньої обичайки: *а, г* – температура, К; *б, д* – сумарні переміщення, м; *в, е* – еквівалентні напруження за Мізесом, Па

Кожух



Внутрішня обичайка з ребрами

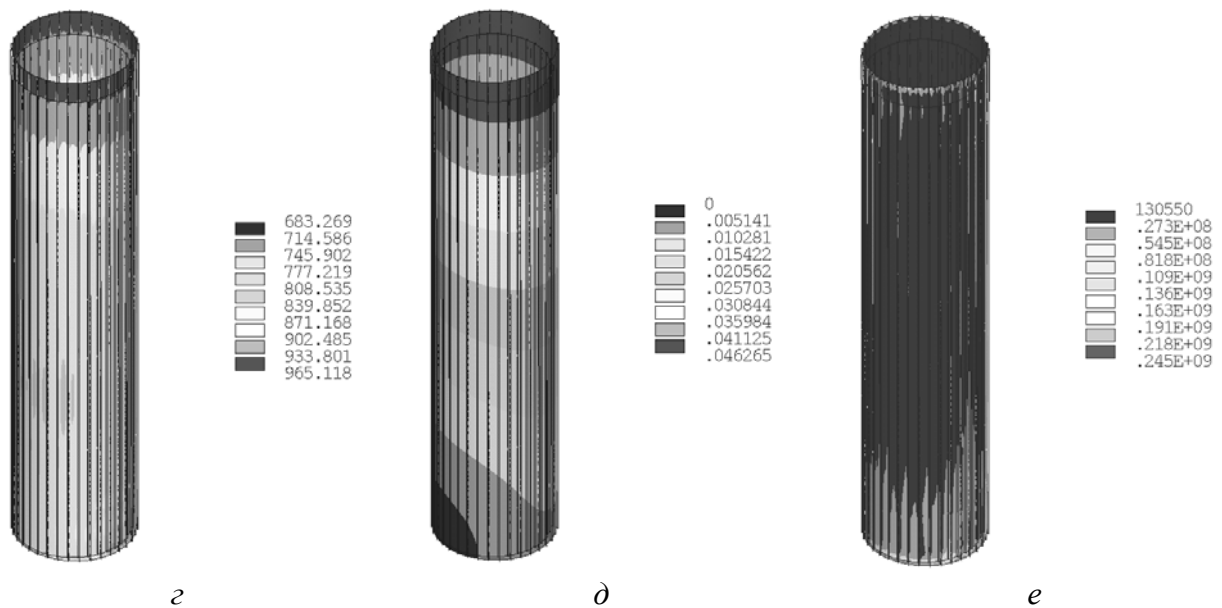


Рис. 9.7. Результати розрахунків на міцність рекуператора за варіантом 4; друга верхня ступінь – жароміцна сталь 12X17, лист товщиною 3 мм (також показано недеформований контур); залишкові пластичні деформації можливі в нижній частині кожуха та на ребрах внутрішньої обичайки: а, г – температура, К; б, д – сумарні переміщення, м; в, е – еквівалентні напруження за Мізесом, Па

9.1.5. Висновки

Проведений числовий аналіз тепло-гідродинамічного стану та НДС показали доцільність двох технічних рішень (варіанти 3 і 4) із застосуванням двохступінчатого нагріву повітря в радіаційних щілинних рекуператорах.

Розрахункові техніко-економічні показники експлуатації модернізованих рекуператорів такі:

- за варіантом 3 – нагрів повітря до температури біля $630\text{ }^{\circ}\text{C}$ (більш ніж у 1,5 рази порівняно з варіантом 1), що забезпечує економію природного газу 218 тис. $\text{м}^3/\text{рік}$, а в грошовому еквіваленті становить приблизно \$125 195. Із-за більш високого теплового навантаження на металоконструкції в цій модернізації потрібно застосовувати жароміцну сталь з характеристиками міцності вищими за 12X17;

- за варіантом 4 – нагрів повітря до температури $\sim 565\text{ }^{\circ}\text{C}$ (більш ніж у 1,45 рази порівняно з варіантом 1), що забезпечує економію природного газу 157 тис. $\text{м}^3/\text{год}$, а в грошовому еквіваленті становить приблизно \$90 533. Для металоконструкцій верхньої ступені цієї модернізації можна використовувати сталь марки 12X17.

9.2. Модернізація системи охолодження анодного вузла магнієвого електролізера

9.2.1. Постановка задачі й розрахунок

Підвищення продуктивності магнієвого електролізера (рис. 9.8) можна забезпечити за рахунок застосування системи водяного охолодження його анодів.

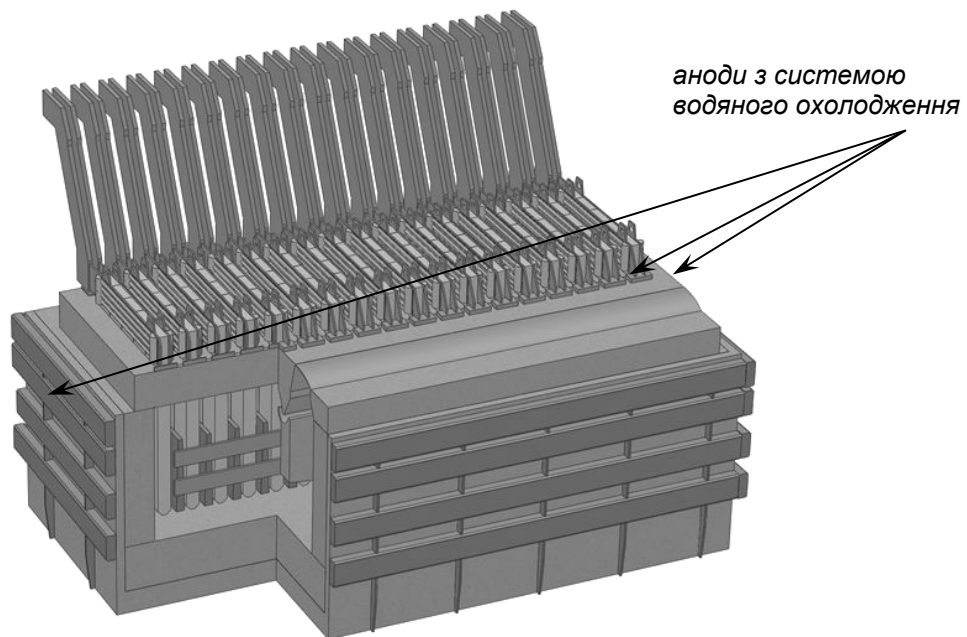


Рис. 9.8. Магнієвий електролізер на силу струму 175 кА

Для описання тепло-гідродинамічного стану аноду магнієвого електролізера з системою примусового водяного охолодження застосовується математична постановка (1.148) (див. п. 1.4, RANS) з крайовими умовами, які включають:

1) початкові умови:

$$\begin{cases} T(X) = T_0; \\ \mathbf{V}(X) = 0; \\ k(X) = 1; \\ \varepsilon(X) = 1. \end{cases} \quad (9.5)$$

2) граничні умови (ГУ):

– на вході в кесон

$$\begin{cases} T_{\text{ex}} = T_{\text{e}}; \\ G_{\text{ex}} = G_{\text{e}}; \\ k(X) = 1; \\ \varepsilon(X) = 1; \end{cases} \quad (9.6)$$

де T_{ex} , G_{ex} – температура (К) і витрати води (кг/с) на вході в кесон, відповідно;

– на виході з кесону

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \nabla T = 0; \\ p = 0; \\ k(X) = 1; \\ \varepsilon(X) = 1; \end{cases} \quad (9.7)$$

де \mathbf{n} – вектор зовнішньої нормалі до поверхні кесону;

– на границях контакту рідина – тверде тіло

$$\begin{cases} \mathbf{V} = 0; \\ \tau_t = \mathbf{n} \cdot (\mu \nabla \mathbf{V}), \end{cases} \quad (9.8)$$

де τ_t – тангенціальне напруження, Па;

– на границях контакту твердих тіл

$$\begin{cases} \{T\} = 0; \\ \{\mathbf{n} \cdot \mathbf{q}\} = 0, \end{cases} \quad (9.9)$$

де $\{T\} = T^+ - T^-$; $\{\mathbf{n} \cdot \mathbf{q}\} = \mathbf{n}^+ \cdot \mathbf{q}^+ - \mathbf{n}^- \cdot \mathbf{q}^-$; $\mathbf{q} = -\lambda(T)\nabla T$ – вектор густини теплового потоку, Вт/м²; «+», «-» – означає ліворуч і праворуч від границі, відповідно;

– на границях контакту із зовнішнім середовищем (див. рис. 9.8)

$$\mathbf{n} \cdot (-\lambda(T)\nabla T) = \alpha_{\text{ef}}(T)(T - T_{\text{oc}}), \quad (9.10)$$

де α_{ef} – ефективний коефіцієнт тепловіддачі, Вт/(м²·К); T_{oc} – температура оточуючого середовища, К.

Математична постановка задачі (1.148) (див. п. 1.4, RANS) з крайовими умовами (9.5)–(9.10) реалізована в числових моделях за допомогою програмного продукту ANSYS FLUENT. Числова модель за варіантом 1 (рис. 9.9 без примусового охолодження) включає тільки тверді матеріали (графіт, мідь і сталь), а за варіантом 2 (див. рис. 9.9 з примусовим охолодженням) – також і рідину (воду), що циркулює в кесонах. Фізичні властивості води задавалися залежно від температури. Для задання ГУ конвективного типу (9.10) в обох числових моделях використовувалися User Define Function (UDF-функції) [37], що були спеціально написані на мові програмування високого рівня C відповідно до схеми задання ГУ (рис. 9.10). З метою спрощення процедури дискретизації твердотільної моделі аноду та значного зменшення числа невідомих (розрахункових комірок – cells) металеві тонкостінні трубки кесону не будувалися, а замість цього застосовувалися можливості ANSYS FLUENT [37] із задання товщини стінок та їх матеріалів у ГУ, використовуючи при цьому опції: Wall Thickness, Shell Conduction, Material Name. При побудові числових моделей також враховувалася осьова симетрія конструкції (див. рис. 9.9). У результаті кількість розрахункових комірок числових моделей становила: за варіантом 1 – 144752, а за варіантом 2 – 282181.

Результати виконаних числових експериментів за розробленими числовими моделями фізичних полів аноду представлено на рис. 9.11 і 9.12.

Розрахункове значення середньої швидкості води на вході в кесон за варіантом 2 за її витрати $G_{\text{вх}} = 0,155$ кг/с і температури $t_{\text{вх}} = 20$ °С становить $V_{\text{сер}2} = 0,41$ м/с, втрати статичного тиску – $\Delta p_{\text{стат}2} = 345$ Па = 0,00345 бар, а повний тиск води на вході в кесон для забезпечення заданої витрати води – $p_{\text{стат}} + p_{\text{дин}}|_2 = 0,0043$ бар. Розрахункова температура на виході з кесону – $t_{\text{вих}2} = 43,8$ °С.

На підставі отриманих результатів числового аналізу теплового стану аноду до й після його модернізації можна визначити теплові втрати, за якими потім виконати оцінку можливості підвищення сили струму на магнієвому електролізері. За варіантом 1 маємо, що від половини аноду конвекцією до повітря відводиться така потужність

$$Q_{\text{вар.1}} = 2,9 \text{ кВт.}$$

У результаті від електролізера з 18 анодами за варіантом 1 знімається така теплова потужність

$$Q_{\Sigma \text{вар.1}} = Q_{\text{вар.1}} \cdot 2 \cdot 18 = 104,4 \text{ кВт.}$$

За варіантом 2 маємо, що від половини аноду за рахунок охолодної води від кесону відводиться

$$Q_{\text{вар.2-1}} \approx G_{\text{вх}} c_p (T_{\text{вх}} - T_{\text{вих}}) = \frac{0,155 \cdot 4182 (316,8 - 293)}{1000} = 15,7 \text{ кВт.}$$

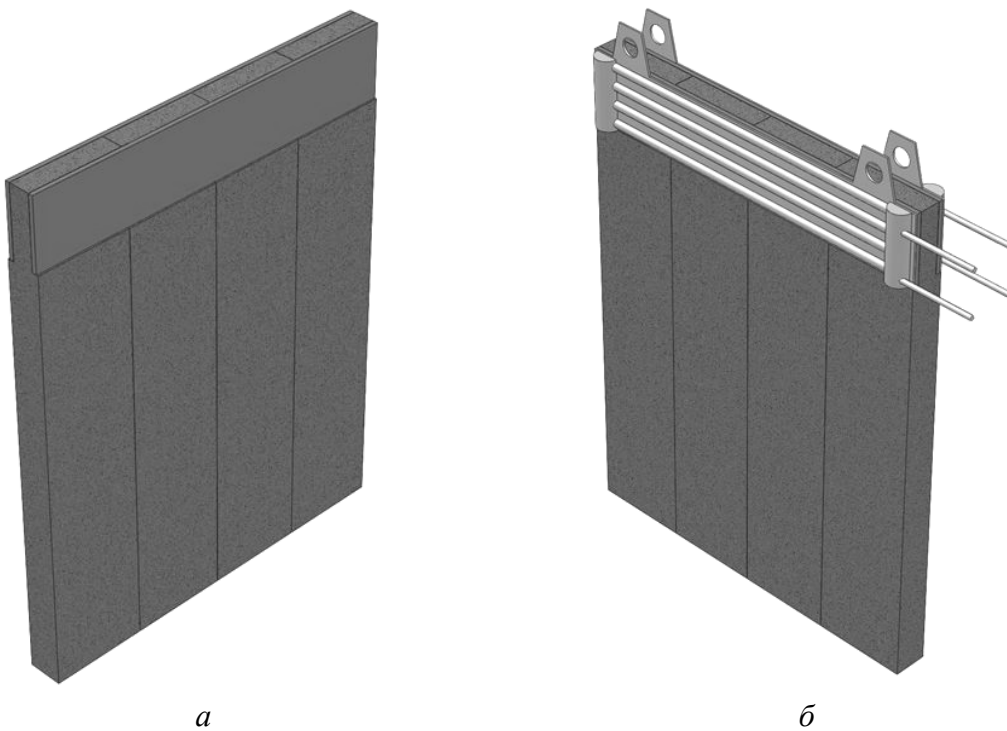


Рис. 9.9. Варіанти конструкцій аноду: *а* – варіант 1 – анод без кесона – охолодження повітрям (гравітаційна конвекція); *б* – варіант 2 – анод з двохходовим водяним кесоном (примусове водяне охолодження)

У результаті від електролізера з 18 анодами за варіантом 2 можна зняти таку теплову потужність

$$Q_{\Sigma \text{вар.2}} = Q_{\text{вар.2}} \cdot 2 \cdot 18 = 565,2 \text{ кВт.}$$

На підставі отриманих даних нескладно провести оцінку граничної величини підвищення сили струму на магнієвому електролізері за рахунок застосування примусового водяного охолодження його анодних пристроїв. Спочатку визначимо величину збільшення тепловідводу у варіанті 2 порівняно з варіантом 1

$$\Delta Q_{\Sigma \text{вар.2}} = Q_{\Sigma \text{вар.2}} - Q_{\Sigma \text{вар.1}} = 565,2 - 104,4 = 460,8 \text{ кВт.}$$

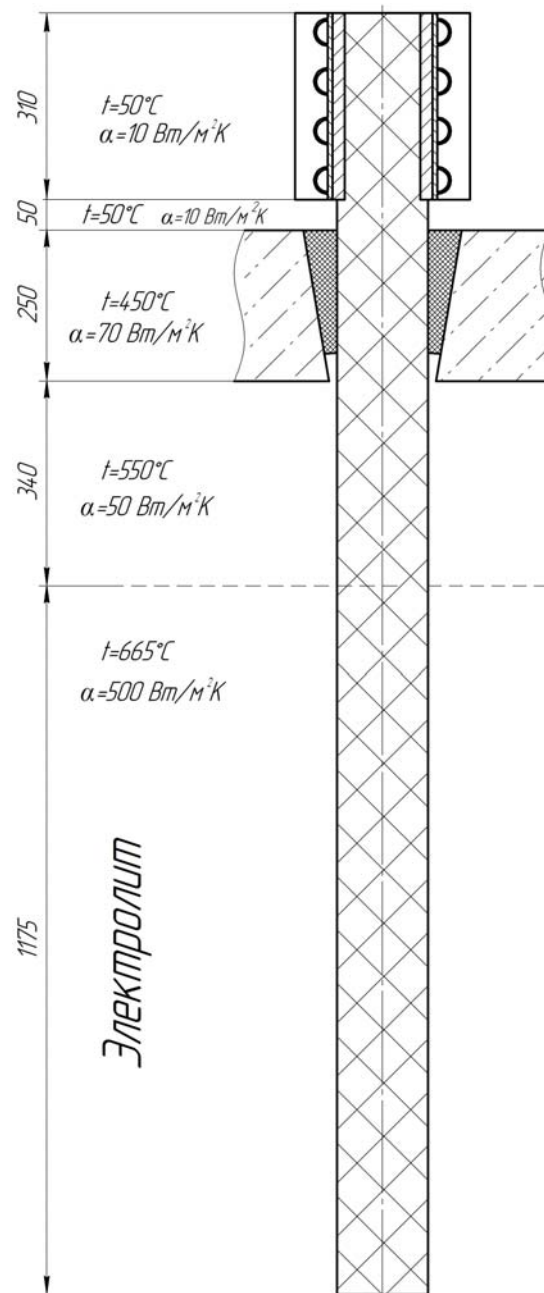


Рис. 9.10. Схема задания ГУ для зовнішнього теплообміну

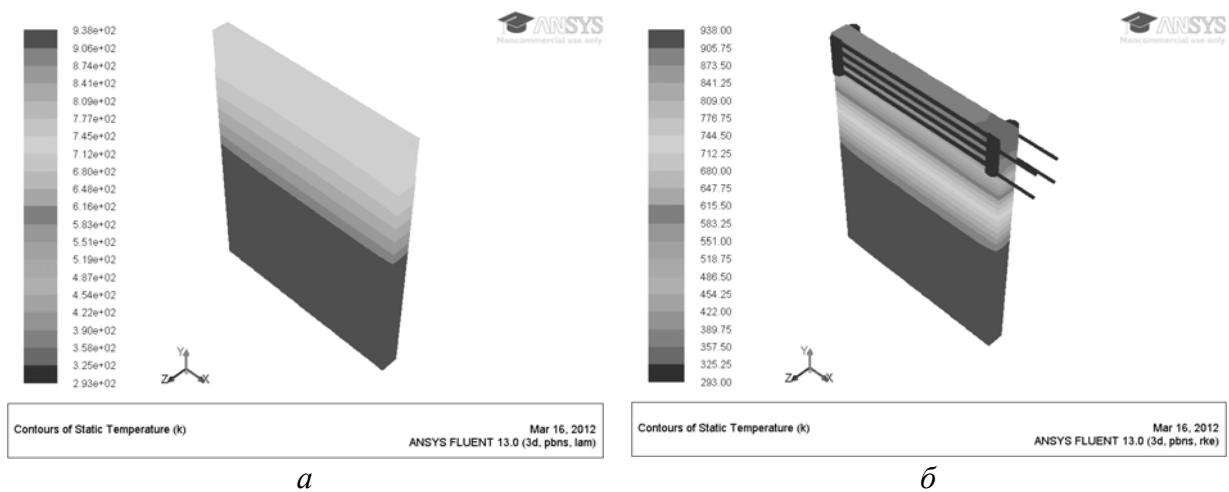


Рис. 9.11. Результати числового аналізу температурного поля аноду до модернізації (а) і після (б)

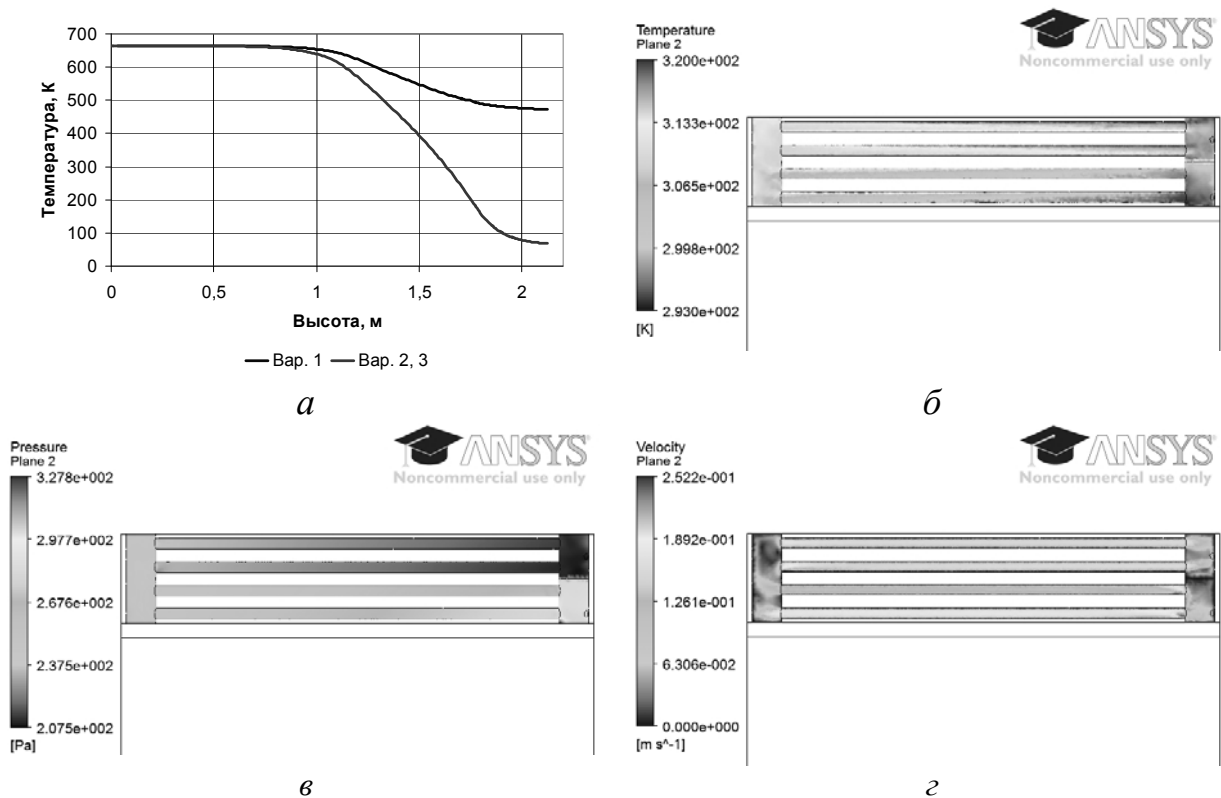


Рис. 9.12. Результати розрахунків фізичних полів аноду: а – співставлення розподілу температури по вертикальній осі аноду; б – з – повздовжній переріз водяного кесона (варіант 2): б – поле температур; в – поле статичного тиску; з – поле швидкості руху води

Якщо за робочу напругу на магнієвому електролізері прийняти значення $u_p = 5,55$ В, то за варіантом 2 будемо мати, що гранична величина підвищення сили струму (ΔI) буде становити

$$\Delta I = \frac{\Delta Q_{\Sigma \text{вар.2}}}{u_p} = 460,8/5,55 = 83 \text{ кА},$$

що відповідає підвищенню продуктивності за магнієм на електролізері з модернізованими анодами на

$$\Delta P = 24 \Delta I \gamma \eta = 24 \cdot 83 \cdot 0,454 \cdot 0,8 \approx 723,5 \text{ кг/доб},$$

де $\gamma = 0,454 \text{ г/(А} \cdot \text{год)}$ – електрохімічний еквівалент одержання магнію; $\eta = 0,8$ – вихід за струмом.

9.2.2. Висновки

Застосування системи примусового водяного охолодження анодів магнієвого електролізера дозволить підвищити силу струму на ванні з 175 кА до 258 кА. При цьому продуктивність магнієвого електролізера підвищується на 0,724 т/доб.

9.3. Розробка регламенту підводу теплової потужності при полум'яному випалі подини алюмінієвого електролізера

9.3.1. Постановка задачі й розрахунок

Вуглеграфітова частина катодів алюмінієвих електролізерів набирається із окремих блоків або катодних секцій (КС), зазори між якими заповнюються масою подовою холодно-набивною (МПХН). Тому кінцевим етапом підготовки катодів до експлуатації є випал, основною метою якого є коксування міжблочних та периферійних швів із набивної маси та досягнення подиною експлуатаційних температур. Існує багато видів випалу катодів [38], але останнім часом найбільшого поширення у світі набув полум'яний випал з використанням газоподібного або рідкого палива.

До основних критеріїв якості випалу належать: кінцеві температури і глибина коксування міжблочних й периферійних швів; рівномірність нагрівання подини. Ці показники, рівною мірою, залежать як від якості використовуваних при монтажі матеріалів, якості самого монтажу так і від температурного режиму випалу, тобто інтенсивності (темпу) й тривалості нагрівання подини (або регламенту випалу) [38]. Оптимальною температурою поверхні міжблочних швів та вугільних блоків наприкінці випалу варто вважати 800–900 °С (середнє значення). До кінця випалу міжблочні шви повинні бути скоксовані по всій глибині подини. Периферійні шви повинні бути прогріті до температури 450–550 °С, а глибина їх коксування наприкінці випалу повинна становити близько 100–150 мм від поверхні [38]. При випалі подини в набивних швах проті-

кають різні фізико-хімічні процеси (виділення розчиненої вологи й газів, синтез молекул напівкоксу, затвердіння сполучного, перехід напівкоксу в кокс). Кожний з перерахованих процесів характеризується певним інтервалом температур. Найбільш важливими з погляду одержання монолітної й міцної подини є процеси утворення напівкоксу. Дослідження представлені в праці [38] показали, що температурний інтервал утворення напівкоксу для різних холоднонабивних мас становить 250–350 °С, а початок переходу напівкоксу в кокс відповідає температурам 300–350 °С. Тобто, для одержання якісних швів, з максимальним виходом коксу зі сполучного необхідно знизити темп термообробки при проходженні інтервалу утворення коксу 250–350 °С. При цьому рекомендований темп термообробки становить близько 6–7 К/год [38].

При розробці регламентів випалу алюмінієвих електролізерів широке застосування набуло числове моделювання температурних полів в об'ємі електролізера. Основним завданням числового моделювання температурних полів при випалі катодів є визначення енергозберігаючого регламенту підводу потужності, який би забезпечив науково-обґрунтований темп нагріву подини [38].

Для відпрацювання регламентів випалу катодних пристроїв при їх підготовці до експлуатації, у яких враховуються фази інтенсивного газовиділення при коксуванні набивної подової маси, розроблено числові моделі теплового стану при полум'яному випалі катодних пристроїв із застосуванням програмного продукту ANSYS Mechanical APDL відповідно до математичного формулювання задачі (1.15), (1.19)–(1.25) (див. п. 1.1) і методів числового розв'язання (див. п. 4.6). Приклад числової моделі для розрахунків теплового стану катодного вузла базової конструкції електролізера Запорізького алюмінієвого комбінату (ЗАЛК) показано на рис. 9.13.

Результати числових експериментів із визначення нестационарних температурних полів полум'яного випалу катоду електролізера ЗАЛК терміном 48 год показано на рис. 9.14–9.16.

Аналіз даних (див. на рис. 9.14(а,б,в), 9.15), які отримано при регламенті випалу без врахування фази газовиділення, показує, що:

- на кінець випалу середній рівень температури на поверхні периферійного шва й подини відповідно становить 480 °С і 850 °С, а в об'ємі шва й подини – 400 °С і 510 °С, що відповідає вимогам [38];

- в інтервалі температур утворення напівкоксу і коксу 250–350 °С з найбільшим газовиділенням швидкість термообробки подини сягає 13–23 К/год, що значно перевищує рекомендоване значення [38].

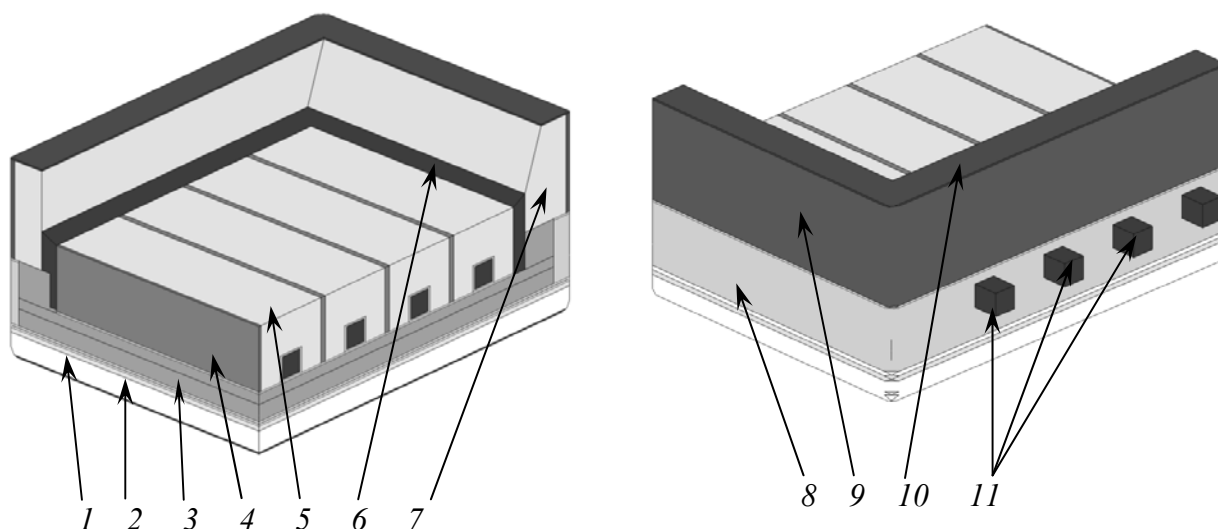
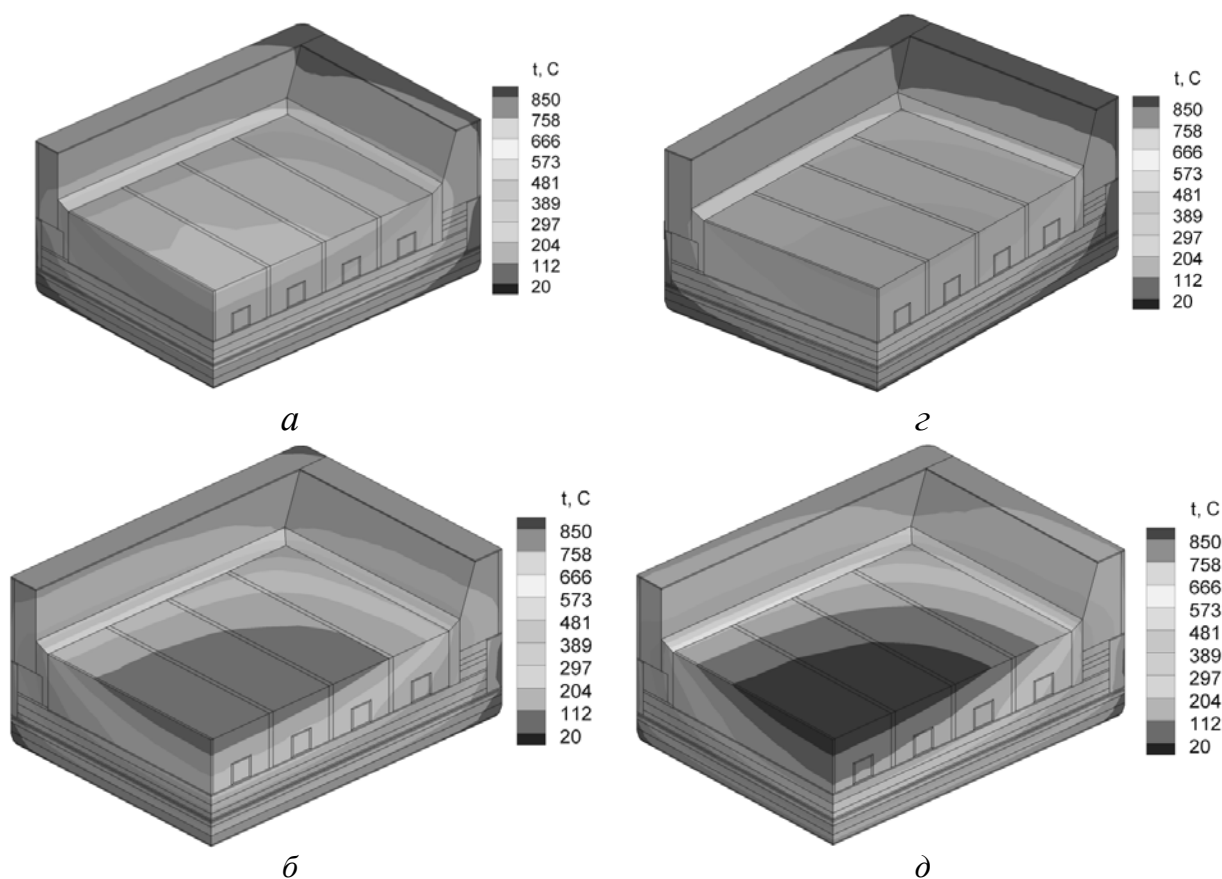


Рис. 9.13. Геометричні характеристики числової моделі для розрахунків нестационарних полів температури при полум'яному випалі катоду алюмінієвого електролізера ЗАЛК на силу струму 70 кА: 1 – шар вермікулиту; 2 – шар сухої бар'єрної суміші; 3 – шар шамоту; 4 – міжблочний шов (набивна маса); 5 – подовий блок; 6 – периферійний шов (набивна маса); 7 – бортовий блок; 8 – шар спученого вермікулиту; 9 – заповнювач шамотний; 10 – шар торкрет маси; 11 – блюмси



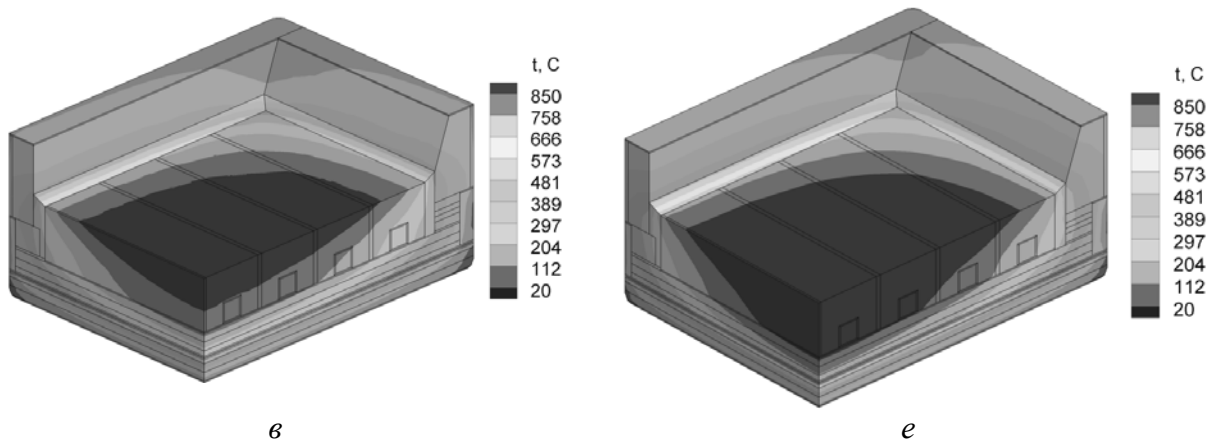


Рис. 9.14. Нестационарні температурні поля при випалі катоду алюмінієвого електролізера на силу струму 70 кА: а, б, в – регламент випалу без врахування особливостей фази інтенсивного газовиділення набивної маси; г, д, е – регламент випалу з врахуванням особливостей фази інтенсивного газовиділення набивної маси; а – 35 год, $t_{\max} = 596\text{ }^{\circ}\text{C}$; б – 42 год, $t_{\max} = 849\text{ }^{\circ}\text{C}$; в – 48 год, $t_{\max} = 985\text{ }^{\circ}\text{C}$; г – 20 год, $t_{\text{сер}} = 358\text{ }^{\circ}\text{C}$, $t_{\max} = 417\text{ }^{\circ}\text{C}$; д – 42 год, $t_{\text{сер}} = 793\text{ }^{\circ}\text{C}$, $t_{\max} = 938\text{ }^{\circ}\text{C}$; е – 48 год, $t_{\text{сер}} = 882\text{ }^{\circ}\text{C}$, $t_{\max} = 995\text{ }^{\circ}\text{C}$; $t_{\text{сер}}$, t_{\max} – середня та максимальна температура подини на даний час, відповідно

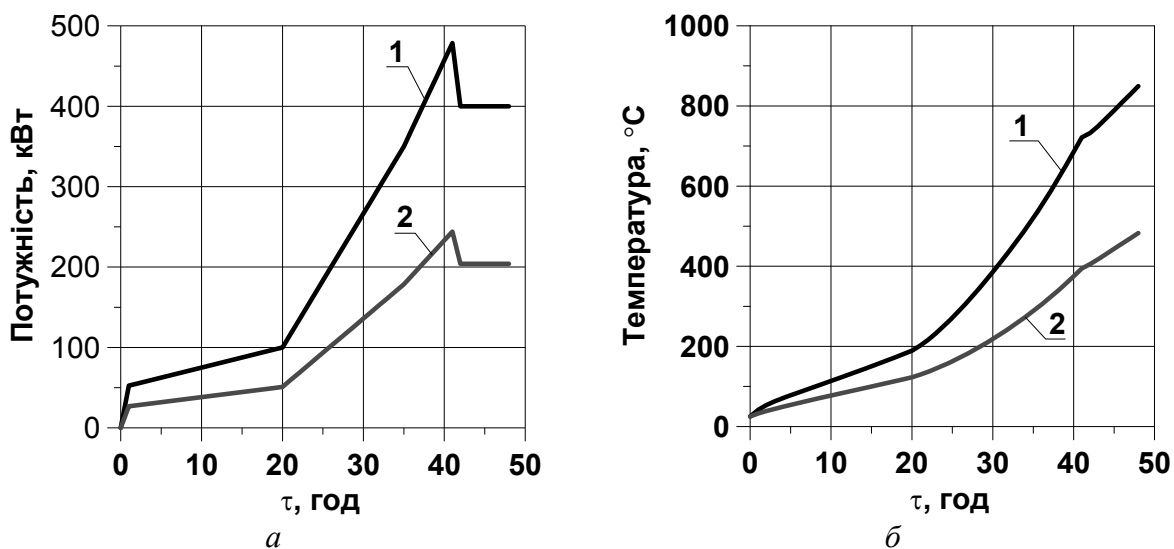


Рис. 9.15. Параметри полум'яного випалу катоду електролізера СА БС на силу струму 70 кА ЗАЛК, у регламенті якого не враховуються особливості фази інтенсивного газовиділення набивної подової маси: а – зміна в часі (τ) потужності на пальниках (1) і потужності, що сприймається подиною (2); б – зміна в часі (τ) середньої температури поверхонь подини (1) і периферійних швів (2)

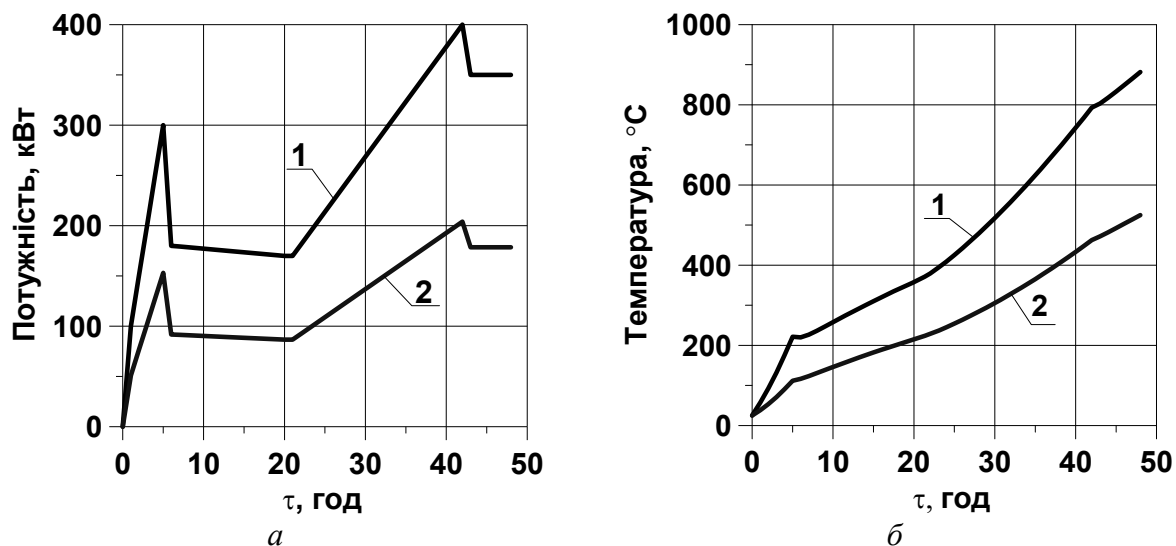


Рис. 9.16. Параметри полум'яного випалу катоду електролізера СА БС на силу струму 70 кА 3АлК, регламент якого розраховано з врахуванням особливостей фази інтенсивного газовиділення набивної подової маси *а* – зміна в часі (τ) потужності на пальниках (1) і потужності, що сприймається подиною (2); *б* – зміна в часі (τ) середньої температури поверхонь подини (1) і периферійних швів (2)

Із проведеного аналізу виникає необхідність визначення регламенту випалу, у якому буде враховано вимоги [38] щодо швидкості термообробки подини в інтервалі температур 250–350 °С. При цьому на інтервалах температур менше за 250 °С і більше 350 °С швидкість термообробки подини не обмежується. Результати таких розрахунків з терміном випалу 48 год наведені на рис. 9.14,з,д,е і рис. 9.16.

Аналіз даних (див. рис. 9.14,з,д,е і рис. 9.16) показує, що:

- на кінець випалу середній рівень температури на поверхні периферійного шва й подини, відповідно, становить 525 °С і 882 °С, а в об'ємі шва й подини – 435 °С і 534 °С, що відповідає вимогам [38];
- середній рівень температури на кінець випалу на поверхні периферійного шва й подини, відповідно, становить 525 °С і 882 °С, а в об'ємі шва й подини – 435 °С і 534 °С, що відповідає вимогам [38];
- в інтервалі температур утворення напівкоксу й коксу 250–350 °С з найбільшим газовиділенням середня швидкість термообробки подини не перевищує 7,3 К/год, що відповідає вимогам [38];
- термін випалу можна скоротити на 4 год без погіршення його кінцевих термічних характеристик.

Енергозбереження при термообробці катоду забезпечується за рахунок скорочення терміну випалу, наприклад, на 4 год. При цьому кінцеві термічні характеристики випалу не погіршуються, а економія природного газу становить близько 184 м³ на один катод. Застосування запропонованого регламенту дозволяє значно зменшити ймовірність появи тріщин у міжблочних й периферійних швах, забез-

печити «м'який» пуск з напругою не більше 10–12 В і підвищити термін експлуатації електролізера на 3–6 міс.

9.3.2. Висновки

Розроблений регламент випалу подини алюмінієвого електролізера забезпечує енергозбереження за рахунок скорочення тривалості випалу на 4 год (економія природного газу складає 184 м³ на один катод) та дозволяє підвищити термін експлуатації електролізера на 3–6 міс за рахунок зменшення ймовірності появи тріщин у міжблочних й периферійних швах та забезпечення «м'якого» пуску з напругою не більше 10–12 В.

9.4. Механічний стан катодів алюмінієвих електролізерів у режимі експлуатації

9.4.1. Постановка задачі й розрахунок

Для проведення розрахунків напружено-деформованого стану (НДС) катодів алюмінієвих електролізерів різних типів та конструкцій під час їх експлуатації використовуються відповідні числові моделі із застосуванням математичних моделей, які описані в пп. 7.1, 7.2. Побудову числових моделей механічного стану розглянемо на прикладі діючого електролізера С8-БМ (рис. 9.17) з використанням програмного продукту ANSYS Mechanical APDL. Числові моделі НДС інших типів та конструкцій алюмінієвих електролізерів будуються аналогічним чином та мають схожі характеристики.

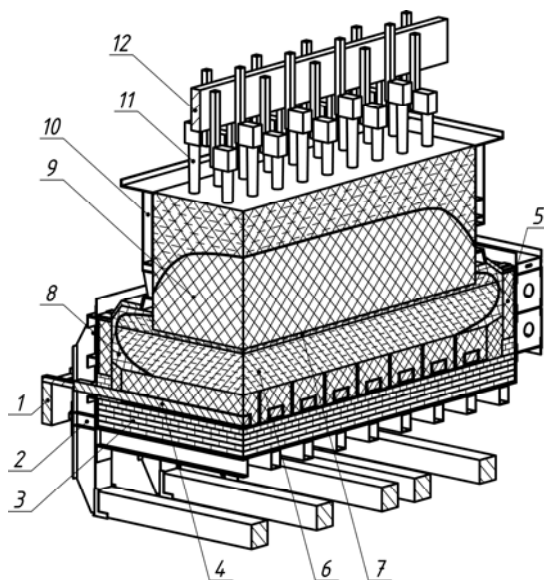


Рис. 9.17. Електролізер СА з верхнім підводом струму (С8-БМ) на силу струму 156кА:

- 1 – катодна шина; 2 – контрфорсний катодний кожух; 3 – цокольна футеровка;
4 – подова секція; 5 – бортовий блок; 6 – метал; 7 – електроліт; 8 – гарнісаж і настіль;
9 – самоспільний анод; 10 – анодний кожух; 11 – штир; 12 – анодна шина

Геометричні характеристики тривимірної числової моделі НДС катоду алюмінієвого електролізера С8-БМ при експлуатації наведені на рис. 9.18. Розроблені числові моделі дозволяють виконувати такі розрахунки при базовій та підвищеній силі струму з врахуванням контактної взаємодії між елементами конструкції: поле переміщень з визначенням розмірів зазорів, деформацій і напружень; еквівалентні пластичні деформації й напруження катодного кожуху та ін.

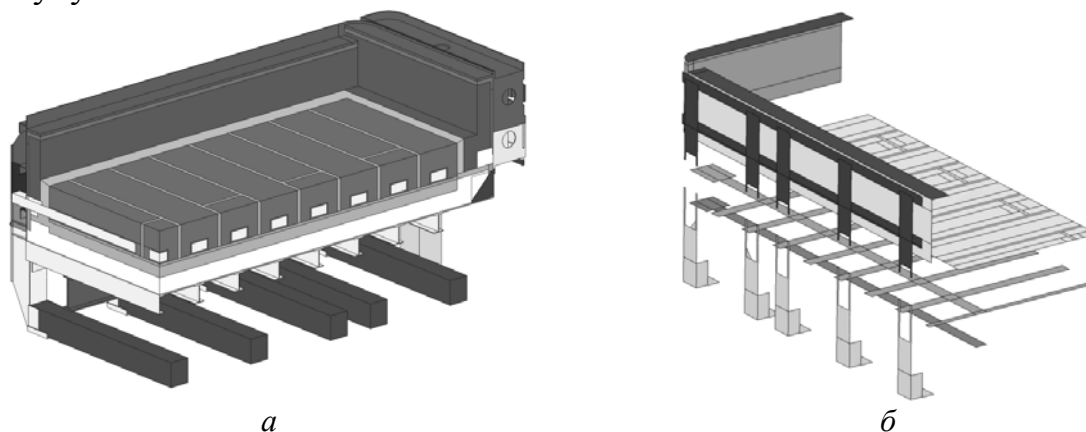


Рис. 9.18. Числова модель НДС при експлуатації катодного вузла алюмінієвого електролізера з катодним кожухом контрфорсного типу: *а* – твердотільна модель; *б* – контактні поверхні

У числовій моделі НДС, наприклад, для контрфорсного катодного кожуху контактні пари приймалися такими (див. рис. 9.18): між бетонними опорами й балкою під днищем катодного кожуху; контрфорсами й зовнішньою стороною обичайки кожуху; внутрішньою стороною обичайки кожуху й катодною футеровкою; чавунною заливкою блямсів і пазами в подових блоках; подиною й сухою бар'єрною сумішшю (СБС). У числовій моделі НДС, окрім температурних навантажень при робочих режимах, також враховувались силові навантаження на катод: об'ємні сили тяжіння за рахунок ваги конструкції кожуху, футеровки та ін.; тиск на верхню поверхню подини за рахунок ваги розплавів і подової та бортової настилі; натрієве розширення катодних і бортових блоків, міжблочних і периферійних швів. Оскільки катодний вузол складається з різнорідних за своїми механічними властивостями матеріалів, то для оцінки їх міцності використовується різні теорії міцності і, відповідно, певний набір критеріїв міцності: для крихких матеріалів використовується критерій Мора [40] ($\sigma_{\text{ekv M}} = \sigma_1 - \{[\sigma_+]/[\sigma_-]\}\sigma_3 \leq [\sigma_+]$, де σ_1, σ_3 – головні напруження ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$), Па; σ_+, σ_- – межа міцності на розтяг і стискання, відповідно, Па), для сипучих – модель Дракера-Прагера [18] і для пружно-пластичних – критерій Мізеса [17, 18]. Для катодних кожухів різних типів (балочних, контрфорсних, шпангоутних та каркасно-шпангоутних) також застосовується спеціальна система оціночних параметрів міцності, яка була запропонована в праці [39], і включає: максимальні значення прогинів катодного кожуху; міру пластичності конструкції; міру руйнування конструкції та міру залишкових деформацій катодного кожуху.

ху.

Система оціночних параметрів міцності катодних кожухів [39]. При проектуванні та модернізації для порівняльного аналізу та оптимізації катодних кожухів алюмінієвих електролізерів визначальне значення мають кількісні характеристики або оціночні параметри НДС металоконструкції. Параметри міцності повинні відповідати таким вимогам: давати можливість здійснювати порівняльний аналіз різних конструкцій; розробляти практичні рекомендації з покращення НДС конструкцій для збільшення їх терміну експлуатації. При експлуатації катодних пристроїв припускають, що всі його елементи знаходяться в стаціонарному режимі роботи, тобто їх НДС має квазістаціонарний характер при усталеному силову та температурному навантаженні [39]. У конструкціях катодних кожухів при робочих режимах виникають залишкові деформації, тобто їх матеріал (ст. 3) знаходиться в пружно-пластичному стані. У практичних розрахунках, з метою врахування своєрідного коефіцієнту запасу міцності, можна не враховувати зміцнення матеріалу за рахунок пластичних деформацій, тобто застосовувати модель ідеальної пластичності [18, 39]. При цьому використання максимальних напружень [39] для кількісної оцінки НДС катодних кожухів, наприклад, для мінімізації їх ваги, немає сенсу, оскільки за умови пружно-пластичного стану інтенсивність напружень не може перевищувати границі текучості матеріалу кожухів. Тому в оціночні параметри міцності катодних кожухів поряд з максимальними переміщеннями необхідно вводити такі інтегральні показники [39]:

1. Переміщення у трьох контрольних точках катодного кожуха:

$$u_1, u_2 > u_3, (u_{i\min} = 10 \text{ мм}; u_{i\max} = 50 \text{ мм}, i = \overline{1,3}), \quad (9.11)$$

де u_1 – максимальний прогин торцевої стінки на рівні середини борту;
 u_2 – максимальний прогин повздовжньої стінки на рівні середини борту;
 u_3 – максимальний прогин днища в центрі;

2. Міра пластичності конструкції (інтегральний параметр μ_σ) визначається як відношення площі конструкції S^* , яка піддана пластичній деформації, до всієї площі її поверхні S . Цей параметр визначає частку поверхні конструкції або окремих її елементів, що знаходяться в стані пластичної течії

$$\mu_\sigma = \frac{S^*}{S}, \quad 0 \leq \mu_\sigma \leq 1. \quad (9.12)$$

3. Міра руйнування конструкції – інтегральний параметр

$$\mu_\varepsilon = \frac{S^{**}}{S^*}, \quad (9.13)$$

де S^{**} – площа поверхні конструкції, на якій інтенсивність пластичних (залишкових) деформацій перевищує деяке критичне значення ε^* (зазвичай беруть, що інтенсивність залишкової деформації $\varepsilon^* = 0,001$ (0,1 %));

4. Інтенсивність пластичних деформацій за Мізесом

$$\varepsilon_{\text{eqv}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})^2 + (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11})^2 + \frac{3}{2}(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{13}^2)}. \quad (9.14)$$

5. Міра залишкових деформацій катодного кожуху (після зняття навантаження). Цей параметр характеризує частку поверхні з підвищеним рівнем залишкових деформацій по відношенню до всієї поверхні елементів конструкції

$$\mu_{\varepsilon \text{ r. strain}} = \frac{S^{**}}{S}. \quad (9.15)$$

Результати числових досліджень НДС катодів різних конструкцій, розрахованих на роботу за різної сили струму наведено на рис. 9.19–9.21 і в табл. 9.3. Для проведення розрахунків відібрані такі конструкції катодних кожухів, які розраховані на роботу як при проектній силі струму так і при підвищеній: катод С8-БМ СА з катодним кожухом контрфорсного типу і проектній силі струму 156 кА; катод С-130 СА з катодним кожухом шпангоутного типу і проектній силі струму 136 кА; катод ОА-320 з катодним кожухом каркасно-шпангоутного типу і проектній силі струму 320 кА. При виконанні числового моделювання НДС фізичні властивості матеріалів бралися із сертифікатів виробників конструкційних матеріалів.

При розрахунках НДС за температурне навантаження конструкції приймалося поле температур, яке розраховувалося за допомогою числових моделей теплоелектричного стану (див. п. 7.1). При цьому натрієве розширення вуглеграфітової частини катодної футеровки (подини) враховувалося за методикою описаною в праці [32].

Аналіз отриманих результатів показує, що:

– співставлення результатів числового моделювання з результатами розрахункових даних по катодних кожухах електролізерів на силу струму 105–210 кА, проведених у праці [39], показує в основному збіг (практично в межах розбігу даних) за оціночними параметрами міцності. Більша частина оціночних параметрів міцності узгоджуються між собою. Значне відхилення спостерігається тільки за параметром μ_ε , що пояснюється іншими умовами проведення розрахунків у праці [39] (тобто без врахування наявності катодної футеровки, контактної взаємодії тощо);

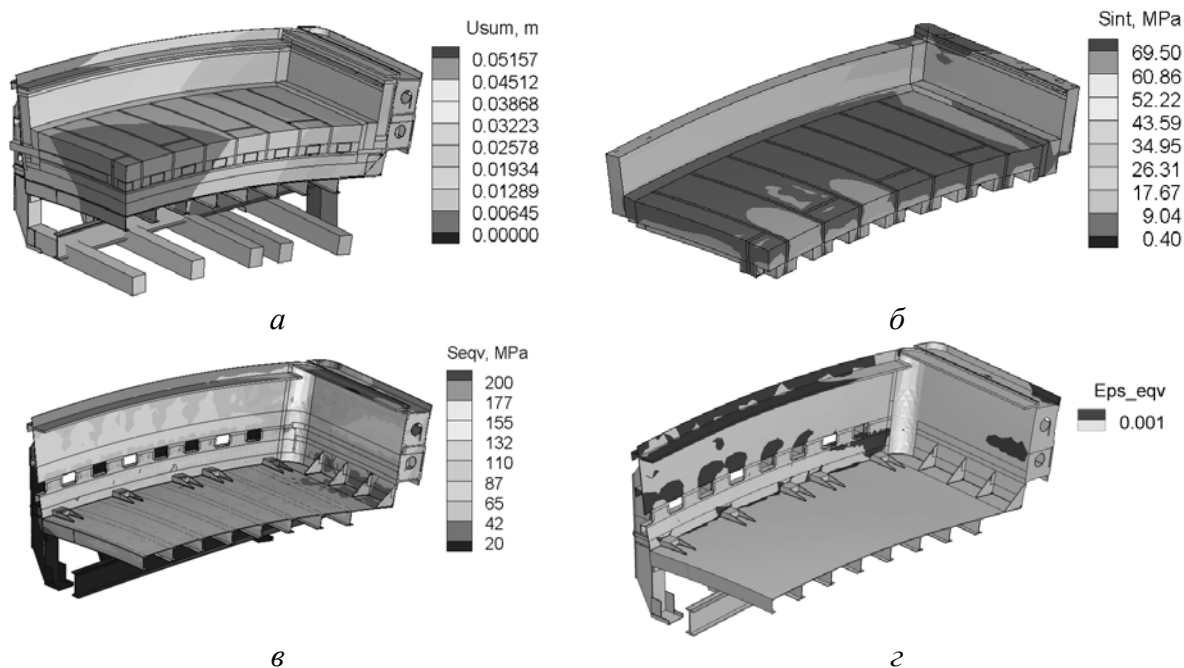


Рис. 9.19. НДС алюмінієвого електролізера середньої потужності С8-БМ під час експлуатації з контрфорсним катодним кожухом з бортовим «температурним швом»: а – сумарні переміщення катода в цілому; б – інтенсивність напружень

$\sigma_{\text{int}} = \max(\sigma_1 - \sigma_2 \parallel \sigma_2 - \sigma_3 \parallel \sigma_3 - \sigma_1)$ вуглеграфітової частини катода;

в – еквівалентні напруження катодного кожуха за Мізесом; г – еквівалентні пластичні деформації катодного кожуху за Мізесом (9.14) (чорним кольором виділені області залишкових пластичних деформацій)

Таблиця 9.3. Співставлення результатів розрахунків НДС катодних кожухів алюмінієвих електролізерів

Тип електролізера/ сила струму, кА	u_1 , мм	u_2 , мм	u_3 , мм	μ_σ , %	ε_{eqv} , %	μ_ε , %	$\mu_{\varepsilon r, strain}$, %
С-130/136,2	20,2	24,0	12,1	28,8	2,79	38,9	11,2
С-130/146,2	21,5	24,6	12,8	30,6	2,87	39,7	12,1
С8-БМ/158,5	29,9	19,4	48,4	11,74	0,65	26,5	3,11
ОА-320/320	27,8	22,1	17,4	15,53	0,57	37,7	5,8
ел-ри на силу струму 105– 210*	12,6–48,4	15,6–18,8	5,1–17,9	2,75–13,5	0,34–1,35	0,24–6,67	–

Примітка. * – розрахунки катодних кожухів шпангоутного типу [39].

– розроблені числові моделі, у яких враховується контактна взаємодія між елементами конструкції, можна застосовувати для виконання розрахунків НДС різних конструкцій катодів алюмінієвих електролізерів на етапі як проектування, так і модернізації при підвищенні сили струму з метою вибору найбільш досконалої конструкції в частині параметрів міцності та металоемності катодних кожухів, забезпечення цілісності подини та ін.;

– конструкція катодного кожуху повинна забезпечувати механічну цілісність катодної футеровки на протязі всієї кампанії експлуатації та мати такі характеристики зовнішнього теплообміну верхнього поясу, щоб забезпечити достатній захисний гарнісаж. У свою чергу механічні умови також можна розділити на дві протилежні вимоги. Катодний кожух з одного боку повинен обжимати футеровку, зокрема, подину, щоб вона не розійшлася по швах (міжблочних та периферійних) та не утворилися тріщини, у які миттєво проникають розплави, проходячи під блоки, і руйнують її в результаті значного підйому. З іншого боку катодний кожух повинен давати можливість розширення крихкій частині катодної футеровки під дією температурного навантаження й натрієвого розширення. Сформульованим вимогам у найбільшій мірі задовольняють катодні кожухи каркасно-шпангоутного та шпангоутного типу зіставної конструкції, а в найменшій – балочного типу й рамно-шпангоутні;

– визначені зони пластичності й небезпечні зони з інтенсивністю пластичних деформацій понад 0,1 % катодних кожухів різних типів: контрфорсного, шпангоутного та каракасно-шпангоутного. До небезпечних зон відносяться: обичайка на повздовжній та торцевій сторонах;

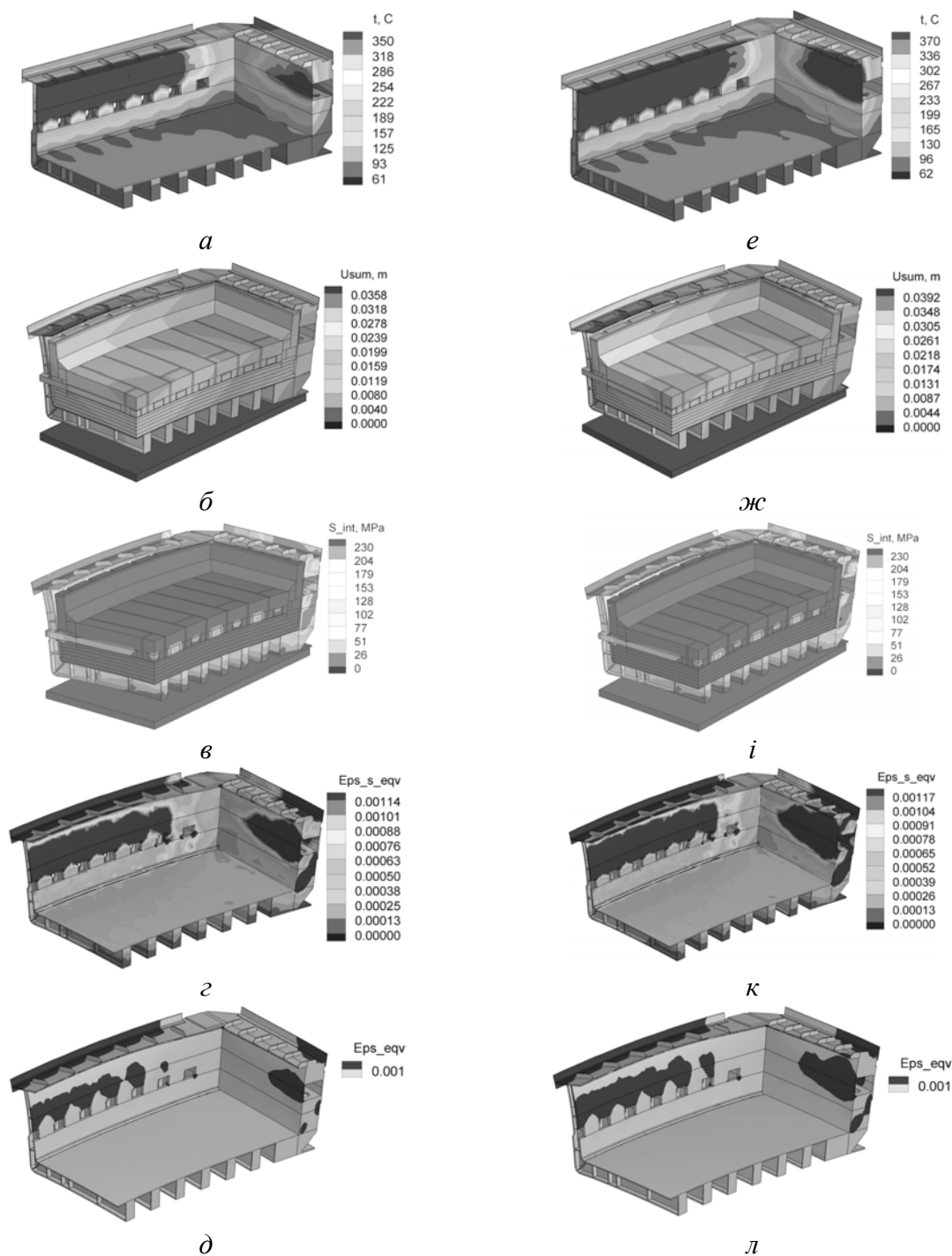


Рис. 9.20. Вплив зміни сили струму на НДС модернізованого катода алюмінієвого електролізера С-130 зі шпангоутним катодним кожухом без бортового «температурного шва»: а–д – сила струму 136,2 кА; е–л – сила струму 146,2 кА; а, е – поле температури; б, ж – поле сумарних переміщень; в, и – поле інтенсивності напружень; г, к – поле сумарної еквівалентної деформації; д, л – поле еквівалентної пластичної деформації; чорним кольором позначені області пластичної деформації (г, к) і залишкової пластичної деформації (д, л)

– відсутність «температурного шва» у бортовій футеровці модернізованих катодів та катодів сучасних потужних електролізерів ОА приводить до підвищення температури обичайки катодних кожухів і відповідно до збільшення площі зон пластичності;

– розглянуті катодні кожухи в цілому забезпечують цілісність подини. При цьому розрахункові еквівалентні напруження за Мором у верхній частині подини не перевищують межу міцності на стискання (згин) для вуглеграфітових та графітованих матеріалів;

– у цілому розрахунки підтверджують певні переваги катодного кожуху каркасно-шпангоутного типу порівняно зі шпангоутним для електролізерів великої потужності. Каркас шпангоутів каркасно-шпангоутних катодних кожухів, на відміну від обичайки, майже немає зон залишкових деформацій і тому може бути використаний у багатьох кампаніях алюмінієвого електролізера. Це також стосується катодних шпангоутних кожухів зіставного типу порівняно з суцільнозварними. У суцільнозварних конструкціях катодного кожуху в стані пластичності знаходяться як обичайка, так і ребра шпангоутів, що безпосередньо контактують з обичайкою.

9.4.2. Висновки

Проведено числовий аналіз НДС катодів різних конструкцій та потужності алюмінієвих електролізерів, який є необхідним при виборі найбільш досконалої конструкції в частині параметрів міцності та металоемності катодних кожухів, забезпечення цілісності подини та ін. і який показав, що кожух каркасно-шпангоутного типу має певні переваги порівняно зі шпангоутним для електролізерів великої потужності.

Запитання для самоконтролю

1. Типи радіаційних рекуператорів, що використовуються в промисловому обладнанні.
2. Вихідні дані для теплового розрахунку радіаційного рекуператора.
3. Варіанти різних конструкцій рекуператора, які задіяні для проведення числового аналізу тепло-гідродинамічного стану.
4. Математична модель, що застосовується для описання тепло-гідродинамічного стану радіаційного рекуператора щілинного типу. Граничні умови.
5. Математична модель, що застосовується для описання НДС радіаційного рекуператора щілинного типу. Граничні умови.
6. У чому полягає енергетична та економічна ефективність запропонованих конструкцій рекуператорів?

7. Для виробництва якого металу застосовується металічний магній та хлор?
8. Для чого застосовують систему водяного охолодження анодів магнієвих електролізерів?
9. Математична модель, що застосовується для описання тепло-гідродинамічного стану аноду магнієвого електролізера з системою примусового водяного охолодження. Граничні умови.
10. Що розуміють під конструкцією водяного кесона?
11. Граничні умови при розрахунках системи водяного охолодження анодів магнієвих електролізерів.
12. Порядок виконання розрахунків при оцінках величини підвищення силу струму на магнієвому електролізері.
13. Для чого проводиться процес випалювання катодних пристроїв алюмінієвого електролізера перед його пуском?
14. Які фізико-хімічні процеси проходять при випалюванні подини алюмінієвого електролізера?
15. З якою метою треба враховувати в регламенті випалу фазу інтенсивного газовиділення із зв'язувальної набивної маси міжблочних та периферійних швів?
16. Математична модель, що застосовується для описання теплового стану при випалюванні подини алюмінієвого електролізера. Граничні умови.
17. У чому полягають переваги модернізованого регламенту випалу порівняно з діючим?
18. Енергозбереження від впровадження та переваги модернізованого регламенту випалу подини алюмінієвого електролізера.
19. Математична модель, що застосовується для описання напружено-деформованого стану алюмінієвого електролізера при його експлуатації. Граничні умови.
20. Які контактні поверхні враховуються в числовій моделі НДС алюмінієвого електролізера при його експлуатації?
21. Які положення теорії міцності використовується для оцінки міцності катодного пристрою алюмінієвого електролізера?
22. Які критерії включає система оціночних параметрів міцності катодних кожухів?
23. Основні етапи аналізу НДС катодного пристрою алюмінієвого електролізера.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ ІНФОРМАЦІЇ

1. Исаченко В. П. Теплопередача : учебн. для вузов / В. П. Исаченко, В. А. Осипова, А. С. Сукомел. — М. : Энергоиздат, 1981. — 416 с.
2. Юдаев Б. Н. Теплопередача : учебн. для вузов / Б. Н. Юдаев. — М. : «Высш. школа», 1973. — 360 с.
3. Poinso T. Theoretical and numerical combustion / Thierry Poinso, Denis Veynante. — 2nd ed. — Philadelphia : Edwards, 2005. — 522 p.
4. Trouv'e A. The evolution equation for the flame surface density / A. Trouv'e, T. Poinso // J. Fluid Mech. — 1994. — P. 1—31.
5. Boger M. Direct Numerical Simulation analysis of flame surface density concept for Large Eddy Simulation of turbulent premixed combustion / M. Boger, D. Veynante, H. Boughanem, A. Trouv'e // In 27th Symp. (Int.) on Combustion. The Combustion Institute. — Pittsburgh, 1998. — P. 917—927.
6. Boughanem H. The occurrence of flame instabilities in turbulent premixed combustion / H. Boughanem, A. Trouv'e // In 27th Symp. (Int.) on Combustion. The Combustion Institute. — Pittsburgh, 1998. — P. 971—978.
7. Пашков Л. Т. Основы теории горения [уч. пособ.] / Л. Т. Пашков. — М. : Моск. энерг. ин-т (техн. унив.), 2011. — 136 с.
8. Ландау Л. Д. Гидродинамика : [изд. 5-е] / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — М. : Физматлит, 2006. — 736 с. — («Теоретическая физика», Т. VI).
9. Берковский Б. М. Вычислительный эксперимент в конвекции / Б. М. Берковский, В. К. Полевилов. — Мн. : Университетское, 1988. — 167 с.
10. Андерсон Д. Вычислительная гидродинамика и теплообмен : в 2-х т. / Д. Андерсон, Дж. Тинненхилл, Р. Плетчер ; пер. с англ. под ред. С. В. Сенина, Е. Ю. Шельмана. — М. : Мир, 1990. — Т. 1. — 1990. — 384 с. — Т. 2. — 1990. — 392 с.
11. Самарский А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. — М. : Наука, 1983. — 614 с.
12. Самарский А. А. Разностные методы решения задач газовой динамики / А. А. Самарский, Ю. П. Попов. — М. : Наука, 1980. — 352 с.
13. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. — М. : Наука, 1984. — 831 с.
14. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости / С. Патанкар. ; пер. с англ. В. Д. Виленского. — М. : Энергоатомиздат, 1984. — 153 с.
15. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич ; пер. с англ. ; под ред. Б. Е. Победри. — М. : Мир, 1975. — 541 с.
16. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд ; пер. с англ. А. А. Шестакова ; под ред. Б. Е. Победри. — М. : Мир, 1979. — 392 с.
17. Бреббия К. Методы граничных элементов / К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вро-

убел ; пер. с англ. Л. Г. Корнейчука ; под ред. Э. И. Григолюка. — М. : Мир, 1987. — 524 с.

18. Бенерджи П. Методы граничных элементов в прикладных науках / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд ; пер. с англ. А. Ф. Зазовского и др. ; под ред. Р. В. Гольдштейна. — М. : Мир, 1984. — 494 с.

19. Бреббия К. Применение метода граничных элементов в технике / К. Бреббия, С. Уокер ; пер. с англ. — М : Мир, 1982. — 248 с.

20. Купрадзе В. Д. Методы потенциала в теории упругости / В. Д. Купрадзе. — М. : Физматгиз, 1963. — 472 с.

21. Chai J. C. Finite volume radiative heat transfer procedure for irregular geometries / J. C. Chai, H. S. Lee, S. V. Patankar // AIAA J. Thermophys. Heat Transfer. — 1995. — Vol. 9, N 3. — P. 410—415.

22. Murthy J. Y. A finite-volume scheme for radiative heat transfer in semi-transparent media / J. Y. Murthy, S. R. Mathur // Numerical Heat Transfer. — 2000. — Part B, 37. — P. 25—43.

23. Kim M. Y. Unstructured finite-volume method for radiative heat transfer in a complex two-dimensional geometry with obstacles / M. Y. Kim, S. W. Baek, J. H. Park // Numerical Heat Transfer. — 2001. — Part B, 39. — P. 617—635.

24. Зигель Р. Теплообмен излучением / Р. Зигель, Дж. Хауэлл ; пер. с англ. ; под ред. Б. А. Хрусталева. — М. : Мир, 1975. — 934 с.

25. Оцисик М. Н. Сложный теплообмен / М. Н. Оцисик ; пер. с англ. ; под ред. Н. А. Анфимова. — М. : Мир, 1976. — 616 с.

26. Калиткин Н. Н. Численные методы: Учеб.пособие. — М. : Наука. Гл.ред.физ.мат. лит., 1978. — 512 с.

27. Ландау Л. Д. Электродинамика сплошных сред : [изд. 4-е, стереотипное.] / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — М. : Физматлит, 2003. — 656 с. — («Теоретическая физика», Т. VIII).

28. Задачи контактного взаимодействия элементов конструкций / [А. Н. Подгорный, П. П. Гонтаровский, Б. Н. Киркач и др.] ; отв. ред. В. Л. Рвачев. — К. : Наук. думка, 1989. — 232 с.

29. Криворученко В. В. Тепловые и энергетические балансы электролизеров / В. В. Криворученко, М. А. Коробов. — М. : ГНТИ по черной и цветной металлургии, 1963. — 320 с.

30. Ветюков М. М. Электрометаллургия алюминия и магния : учеб. для вузов / М. М. Ветюков, А. М. Цыплаков, С. Н. Школьников. — М. : Металлургия, 1987. — 320 с.

31. Карвацкий А. Я. Применение численного моделирования для расчета энергобаланса алюминиевого электролизера / А. Я. Карвацкий, Г. Н. Васильченко, В. В. Билько // Промышленная теплотехника. — 2008. — Т. 30, № 2. — С. 33—40.

32. Теоретичні та експериментальні дослідження теплоелектричного та механічного стану високотемпературних агрегатів : моногр. / А. Я. Карвацький, Є. М. Панов, С. В. Кутузов та ін. — К. : НТУУ «КПІ», 2012. — 352 с.
33. Левченко П. В. Расчет печей и сушил силикатной промышленности / П. В. Левченко. — М. : Высш. школа, 1968. — 367 с.
34. Математичне моделювання складного теплообміну повітряних регенераторів : моногр. / Є. М. Панов, А. Я. Карвацький, І. Л. Шилович та ін. — К. : НТУУ «КПІ», 2011. — 103 с.
35. K. Kesava Rao. An Introduction to Granular Flow / K. Kesava Rao, Prabhu R.Nott. — New York : Publ. in the USA by Cambridge University Press, 2008. — 490 p.
36. Тебеньков Б. П. Рекуператоры для промышленных печей / Б. П. Тебеньков. — М. : Metallurgiya, 1975. — 296 с.
37. ANSYS, Inc. ANSYS FLUENT User's Guide Documentation.
Режим доступу : <http://www.ansys.com>.
38. Обжиг и пуск алюминиевых электролизеров : монография / Б. С. Громов, Е. Н. Панов, М. Ф. Боженко, Г. Н. Васильченко, А. Я. Карвацкий, И. Л. Шилович. — М. : Изд. дом «Руда и металлы», 2001. — 336 с.
39. Прочностные характеристики катодных кожухов шпангоутного типа алюминиевых электролизеров на различную силу тока / В. В. Тихомиров, С. Н. Ахмедов, К. В. Елисеев [и др.] // Цветные металлы. — 2003. — № 3. — С. 47—49.
40. Сопротивление материалов : учебн. для вузов / [Г. С. Писаренко, В. А. Агарев, А. Л. Квитка и др.] ; под ред. Писаренко Г. С. ; [4-е изд.]. — К. : Вища школа, 1979. — 696 с.
41. Тьюарсон Р. Разреженные матрицы / Р. Тьюарсон ; пер. с англ. — М. : Мир, 1977. — 190 с.
42. Джерела енергії і енергозбереження-2. Моделювання енергозберігаючих регламентів промислового обладнання: Текст лекцій для студентів напряму підготовки 6.050503 «Машинобудування» / Уклад.: А. Я. Карвацький — К. : НТУУ «КПІ», 2012. — 245 с. (Свідectво про надання грифа електронному навчальному виданню НМУ №Е11/12-227. НТУУ "КПІ"). — Електронні текстові дані (1 файл: 4,19 Мбайт). — Київ : НТУУ «КПІ», 2012. — Назва з екрана. — Доступ: <http://ela.kpi.ua/handle/123456789/1990>
43. Уилкинсон Р. Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. Линейная алгебра / Р. Уилкинсон ; пер. с англ. ; под ред. Ю. И. Топчиева. — М. : Машиностроение, 1976. — 389 с.

ЗМІСТ

ВСТУП	3
ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ ТА СКОРОЧЕННЯ	5
1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ МЕХАНІЗМІВ ТЕПЛОПЕРЕНОСУ	10
1.1. Теплообмін теплопровідністю. Рівняння теплопровідності. Умови однозначності... 10	
1.2. Конвективний теплообмін. Система рівнянь нерозривності, руху та енергії. Крайові умови	17
1.3. Радіаційний теплообмін. Основні положення	35
1.4. Моделі турбулентних потоків рідини. Наближення Бусінеска	48
Запитання для самоконтролю	57
2. ЧИСЛОВІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ. ОБЛАСТЬ ЗАСТОСУВАННЯ ТА КЛАСИФІКАЦІЯ	60
2.1. Числові методи розв'язання задач теорії поля та механіки суцільного середовища.. 60	
2.2. Методи розв'язання систем дискретних рівнянь	64
Запитання для самоконтролю	69
3. МЕТОД СКІНЧЕННИХ РІЗНИЦЬ	70
3.1. Методи побудови різницевих схем для нестационарного одновимірного рівняння теплопровідності	70
3.2. Методи розв'язання двовимірного рівняння теплопровідності.....	77
Запитання для самоконтролю	80
4. МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ.....	81
4.1. Рівняння методу скінченних елементів. Задачі теорії поля	81
4.2. Двовимірний симплекс-елемент	87
4.3. Тривимірний симплекс-елемент	93
4.4. Двовимірне перенесення теплоти	96
4.5. Тривимірне перенесення теплоти	107
4.6. Побудова числової моделі теплового стану тунельної печі у програмному комплексі ANSYS Mechanical APDL.....	114
Запитання для самоконтролю	126
5. МЕТОД СКІНЧЕННИХ ОБ'ЄМІВ	127
5.1. Метод скінченних об'ємів для розв'язання задач конвективного теплообміну	127
5.2. Застосування методу скінчених об'ємів до розв'язання нестационарної задачі теплопровідності.....	135
Запитання для самоконтролю	139
6. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ РАДІАЦІЙНОГО ТЕПЛООБМІНУ	140
6.1. Спрощений зональний метод. Теплообмін випромінюванням між твердими тілами, розділеними прозорим середовищем	140
6.2. Зональний метод. Теплообмін випромінюванням між твердими тілами, розділеними напівпрозорим середовищем	146
6.3. Наближені методи розв'язання рівняння переносу випромінювання. Диференціальне наближення. Метод моментів. Наближення оптично тонкого і товстого шарів.....	153
6.4. Метод граничних елементів	160
6.5. Метод дискретних ординат	172
Запитання для самоконтролю	176
7. БАГАТОДИСЦИПЛІНАРНИЙ АНАЛІЗ.....	178
7.1. Математична модель теплоелектричного стану промислового обладнання.	

Методика числового розв'язання теплоелектричної задачі	178
7.2. Математична модель термопружного стану промислового обладнання.	
Методика числового розв'язання задачі статичної термопружності	181
Запитання для самоконтролю	184
8. МЕТОДИКИ СКЛАДАННЯ ЕНЕРГЕТИЧНИХ І ТЕПЛОВИХ БАЛАНСІВ ПРОМИСЛОВОГО ОБЛАДНАННЯ	185
8.1. Методика складання енергетичного балансу алюмінієвого електролізера за температури довкілля.....	185
8.2. Методика складання теплового балансу камери печі випалювання та рекуперативного теплообмінника для підігріву повітря	191
Запитання для самоконтролю	197
9. ПРИКЛАДИ ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ДЛЯ РОЗРОБКИ ЕНЕРГОЗБЕРІГАЮЧИХ КОНСТРУКЦІЙ І РЕГЛАМЕНТІВ ЕКСПЛУАТАЦІЇ ПРОМИСЛОВОГО ОБЛАДНАННЯ.....	198
9.1. Модернізація рекуператора скловарної печі продуктивністю 12–14 тонн за добу скломаси	198
9.2. Модернізація системи охолодження анодного вузла магнієвого електролізера.....	208
9.3. Розробка регламенту підводу теплової потужності при полум'яному випалі подини алюмінієвого електролізера	214
9.4. Механічний стан катодів алюмінієвих електролізерів у режимі експлуатації.....	219
Запитання для самоконтролю	227
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ ІНФОРМАЦІЇ	229

Навчальне видання

Карвацький Антон Янович

НАУКОВА РОБОТА ЗА ТЕМОЮ МАГІСТЕРСЬКОЇ ДИСЕРТАЦІЇ

**Методи та інструменти числового аналізу
фізичних полів обладнання хімічних
виробництв та пакувальної техніки**

Навчальний посібник

В авторській редакції